除外ターミナルを含む同一面最短点素パス問題に対するアルゴリズム

<u>寺尾 樹哉</u> , 小林 佑輔

京都大学数理解析研究所

2022年度OR学会関西支部 若手研究発表会　10月29日(土)

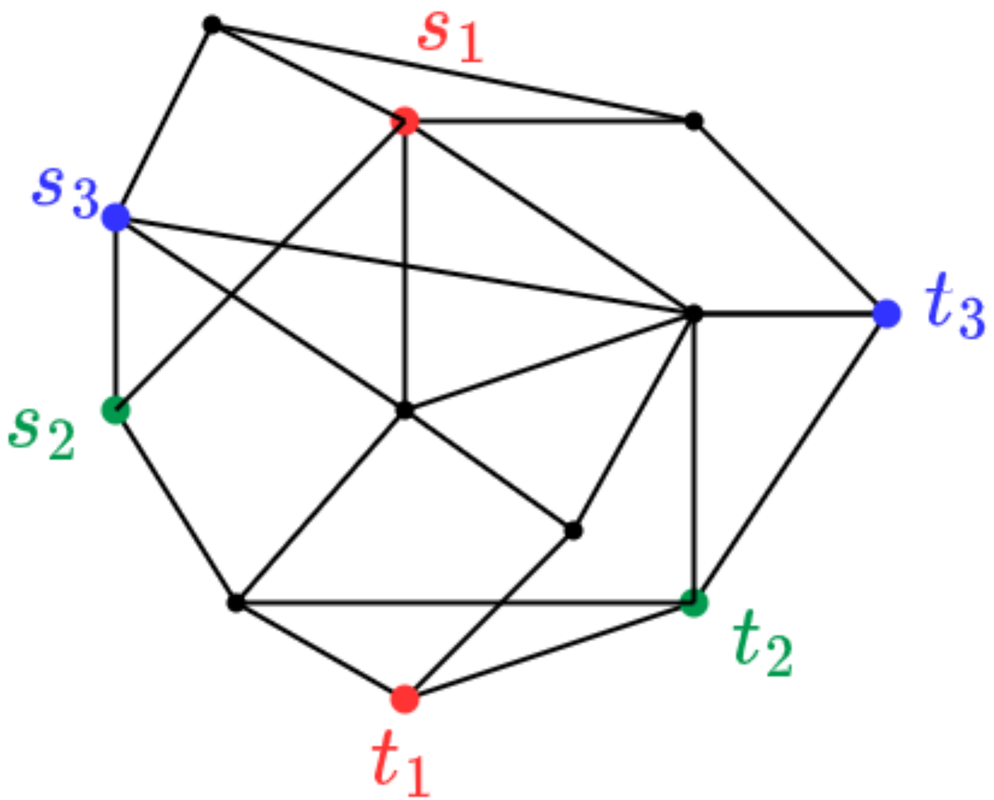
目次

- 先行研究
  - 点素パス問題
  - 最短点素パス問題
  - 同一面最短点素パス問題
- 本研究：除外ターミナルを含む同一面最短点素パス問題
- アイデア
  - $(A+B)$-パスと頂点対のペアリングの対応
- 結論

目次

点素パス問題

入力： **頂点対** $(s_1, t_1), \ldots, (s_k, t_k)$
出力： **点素なパス** $P_1, \ldots, P_k \, (P_i : s_i \rightarrow t_i)$

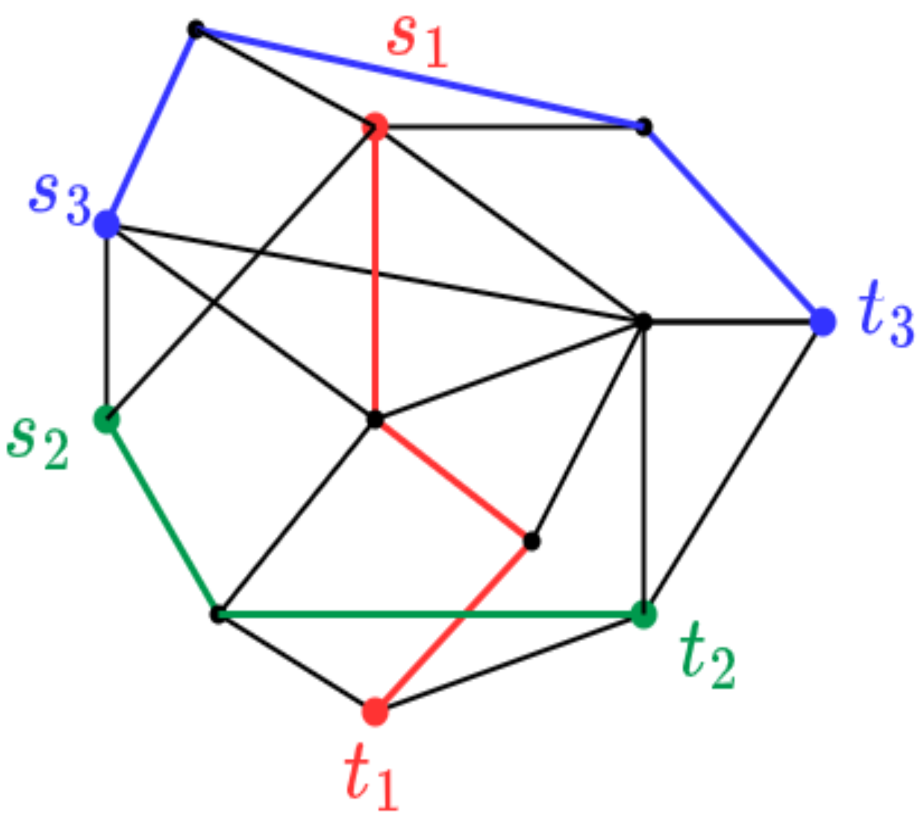


点素パス問題

パスが頂点を共有しない

入力： 頂点対 $(s_1, t_1), \ldots, (s_k, t_k)$

出力： 点素なパス $P_1, \ldots, P_k \; (P_i : s_i \to t_i)$



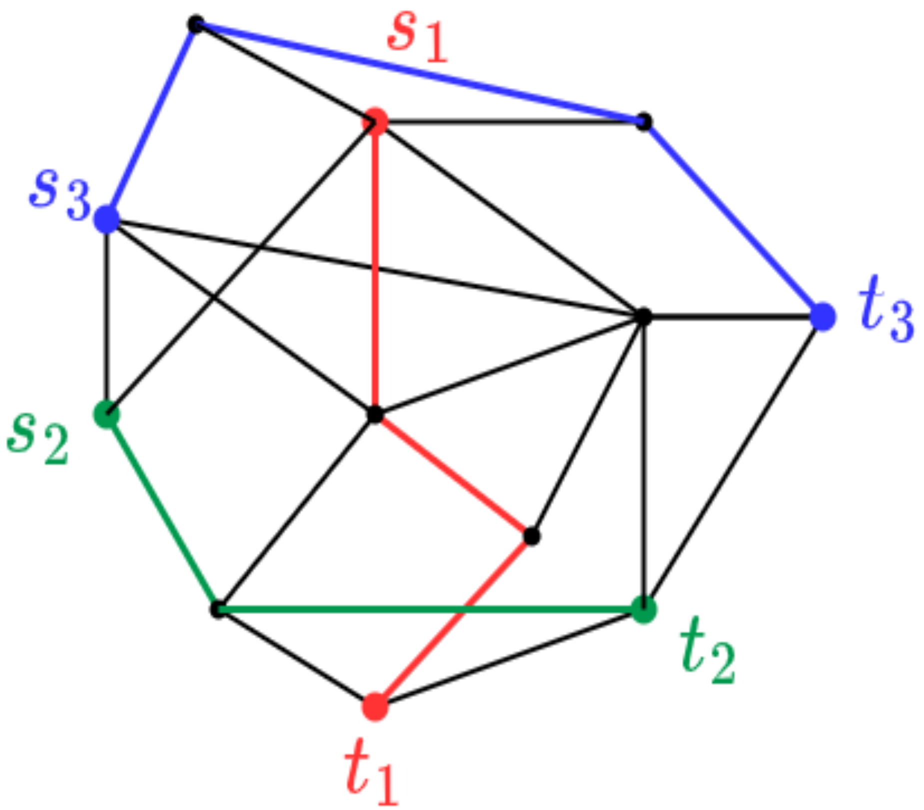
- 多くの応用がある
  例：集積回路の設計，ネットワークの設計
  （1980年代）

点素パス問題

パスが頂点を共有しない

入力：　頂点対 $(s_1, t_1), \ldots, (s_k, t_k)$

出力：　点素なパス $P_1, \ldots, P_k \; (P_i : s_i \to t_i)$



- 多くの応用がある
  例：集積回路の設計，ネットワークの設計（1980年代）
- 多項式時間で解けるか？が主な研究対象

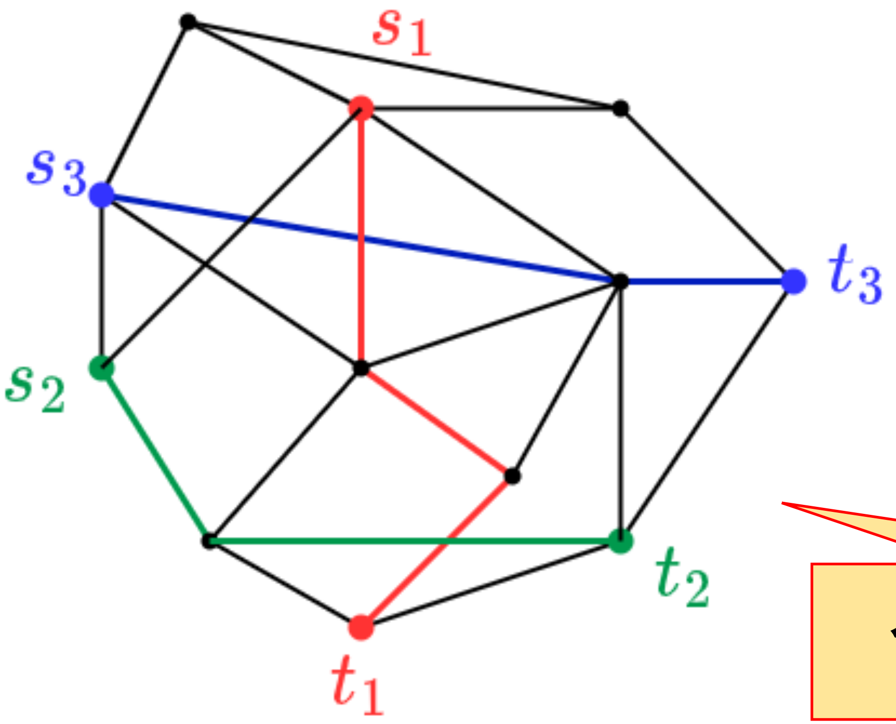
	有向グラフ	無向グラフ
k：定数	NP-困難（Fortune et al.1980）	多項式時間（Robertson & Seymour 1995）
k：変数	NP-困難（Karp 1975）	NP-困難（Karp 1975）

最短点素パス問題

<u>入力</u>： 頂点対 $(s_1, t_1), \ldots, (s_k, t_k)$

<u>出力</u>： 点素なパス $P_1, \ldots, P_k \ (P_i : s_i \to t_i)$

s.t. パスの合計の長さが最小



- 自然な最適化問題
- 頂点対数 k : 定数 , 無向グラフ
- 多くのケースで理論的計算量が未解明
  多項式時間で解けるか？NP困難か？

合計長 : 3 + 2 + 2 = 7

最短点素パス問題が多項式時間で解けるケース(1)

- **頂点対数 $k = 2$ のとき 乱択多項式時間アルゴリズム**

(Björklund & Husfeldt 2014)

mod 4 の**パーマネント**の利用

- **$k = 2$, 平面グラフ, 全頂点の次数が3以下のとき 決定的多項式時間アルゴリズム**

(Björklund & Husfeldt 2018)

パフィアンの利用

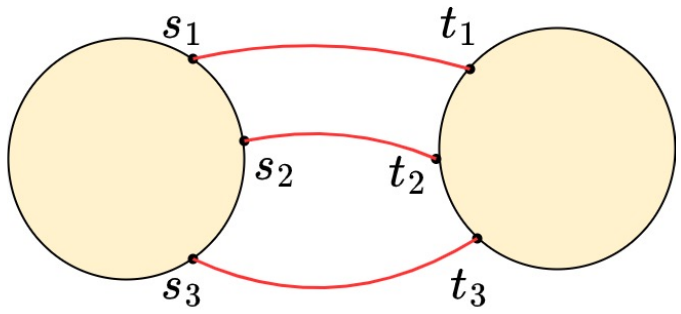
- **解法の鍵：多項式行列を用いた代数的手法**

最短点素パス問題が多項式時間で解けるケース(2)

● **平面グラフで，頂点対に制約がある場合に幾つかの結果**

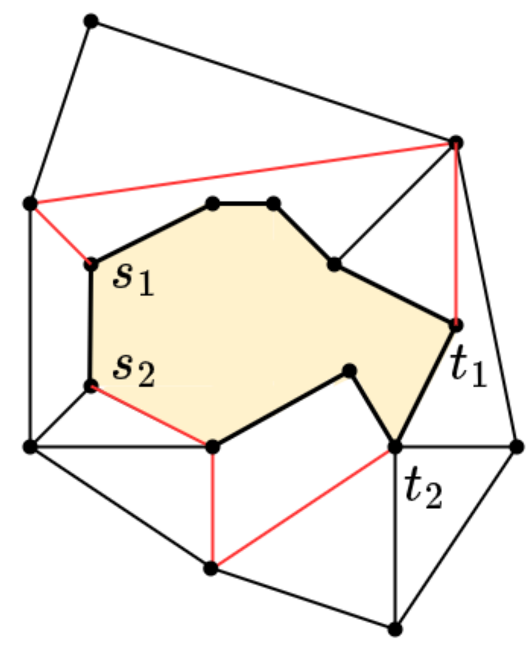
■ $s_1, \ldots, s_k$ **が一面上で，**$t_1, \ldots, t_k$ **が他の一面上**

(Colin de Verdière & Schrijver, 2011)



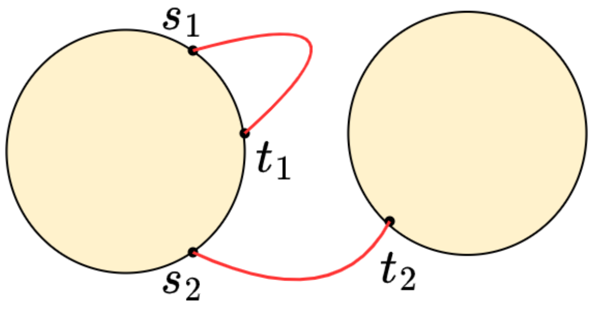
最小費用流の利用

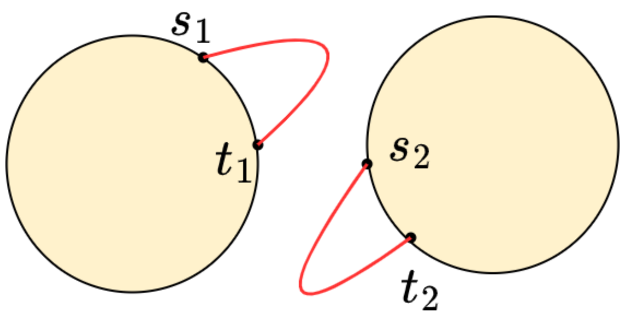
イメージ

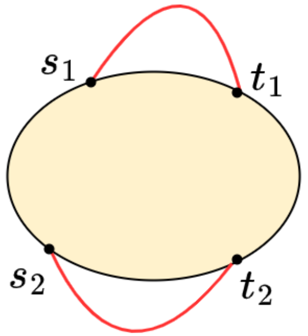


■ $\boldsymbol{k = 2}$ **で，頂点対が高々2面上**

(Kobayashi & Sommer, 2010)

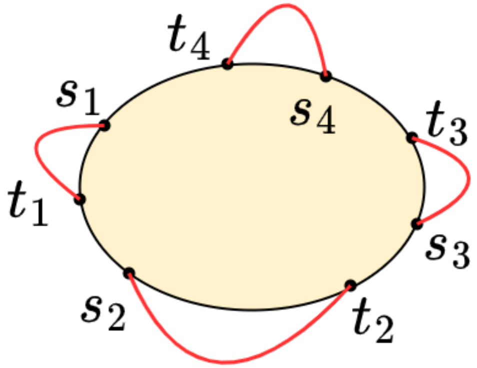






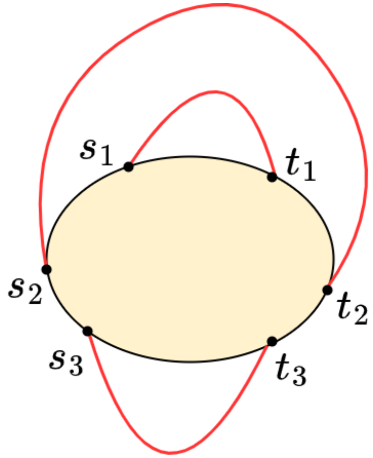
最短点素パス問題が多項式時間で解けるケース(2)

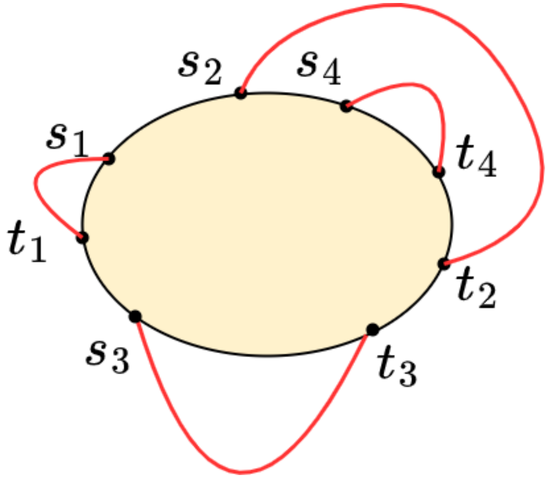
- $s_1, t_1, \ldots, s_k, t_k$ **の順で共通の一面上**　(Borradile et al. 2015)



Kobayashi & Sommerの利用

- **ターミナルが共通の一面上** (Datta et al. 2018)





行列式の利用

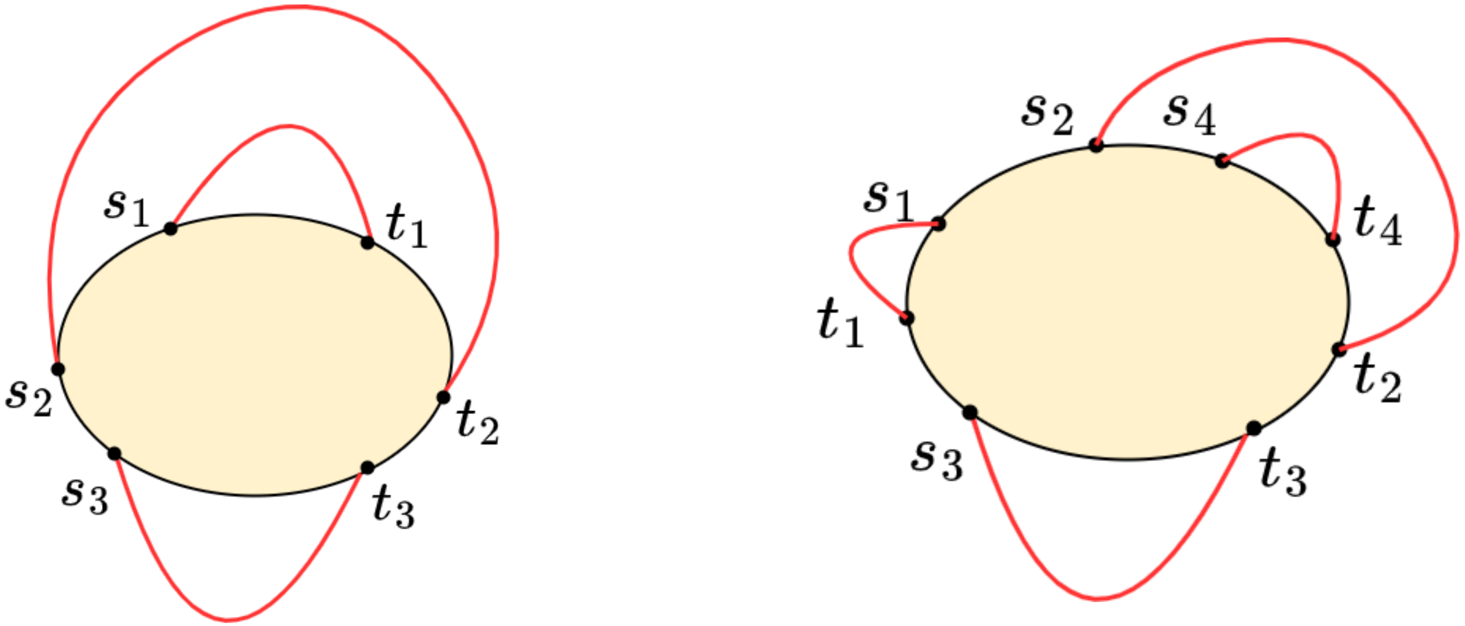
同一面最短点素パス問題 (Datta et al. 2018)

入力： 平面グラフ, 頂点対 $(s_1, t_1), \ldots, (s_k, t_k)$

全てのターミナルが共通の面上

出力： 点素なパス $P_1, \ldots, P_k \ (P_i : s_i \to t_i)$

s.t. パスの合計の長さが最小



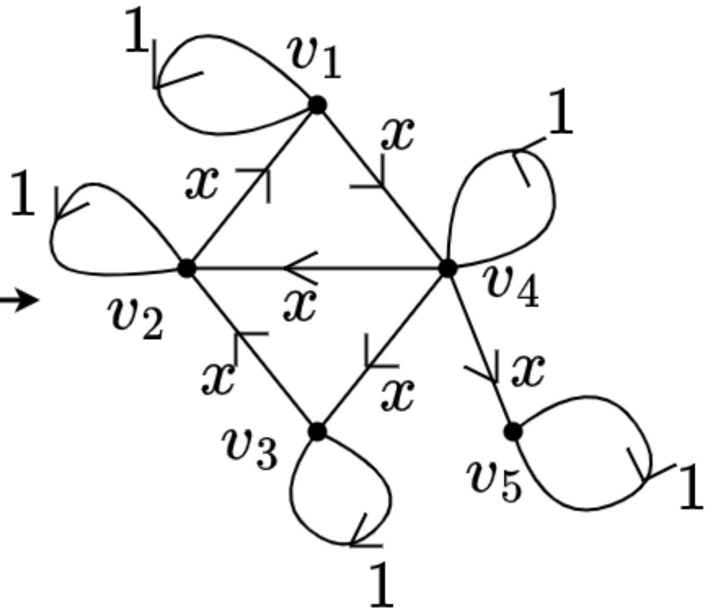
同一面最短点素パス問題に対するアルゴリズム

(Datta et al. 2018)

観察

隣接行列の行列式の展開項は有向グラフの**閉路被覆**に対応

$$\det A[x] = \det \begin{bmatrix} 1 & & & x & \\ x & 1 & & & \\ & x & 1 & & \\ & x & x & 1 & x \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow$$



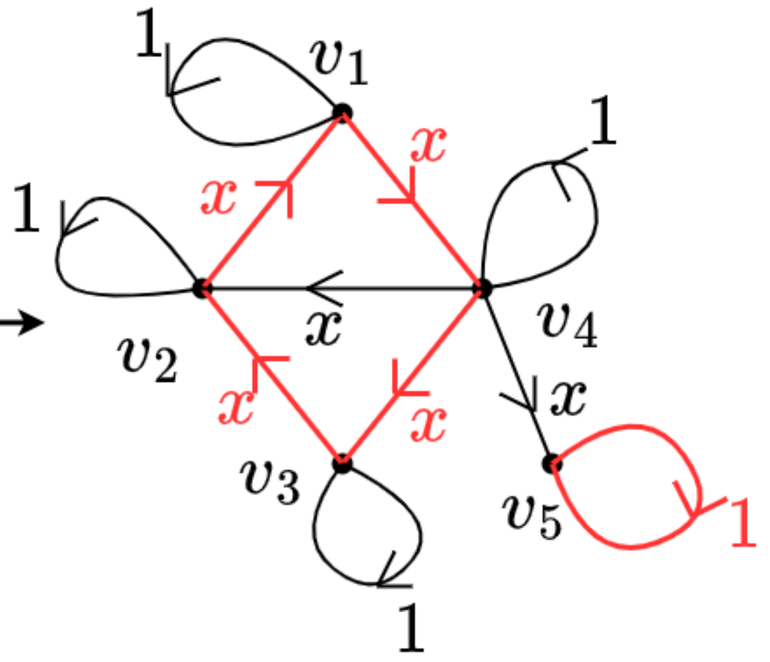
同一面最短点素パス問題に対するアルゴリズム

(Datta et al. 2018)

観察

隣接行列の行列式の展開項は有向グラフの**閉路被覆**に対応

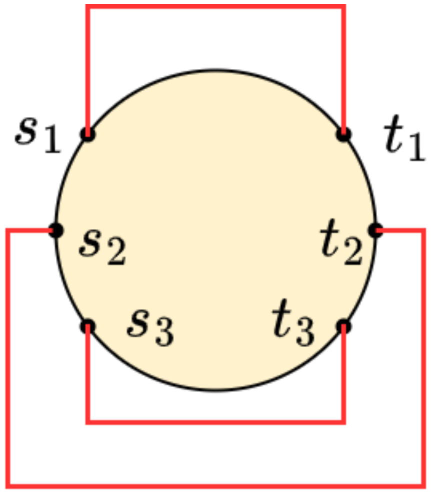
$$\det A[x] = \det \begin{bmatrix} 1 & & & x & \\ x & 1 & & & \\ & x & 1 & & \\ & x & x & 1 & x \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow$$



$$\det A[x] = -x^4 + \cdots$$

同一面最短点素パス問題に対するアルゴリズム

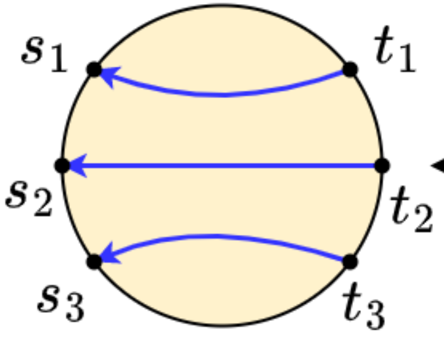
(Datta et al. 2018)



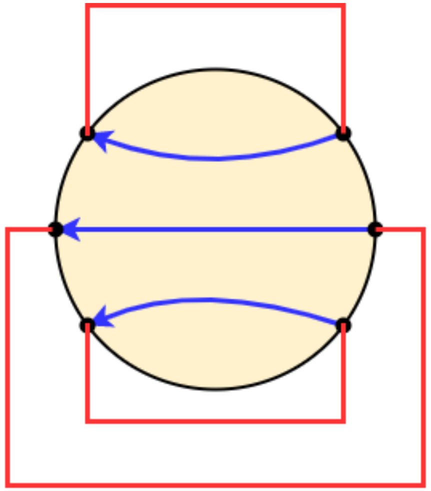
同一面最短点素パス問題に対するアルゴリズム

(Datta et al. 2018)

$\det A_1[x]$ $\longleftrightarrow$



$\longleftrightarrow$



イメージ

$3x^5 + 4x^7 + \cdots$ の場合

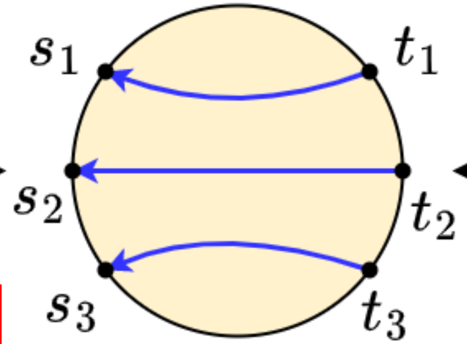
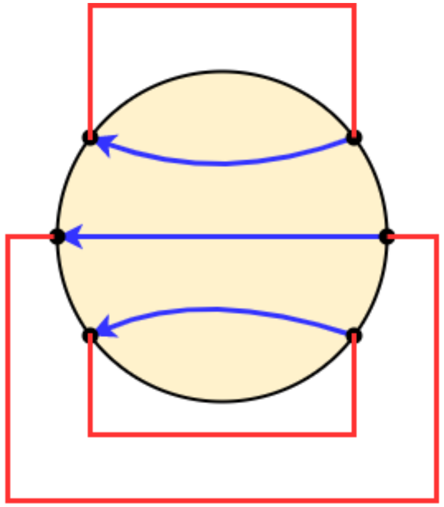
合計長 5 の解が 3 個,

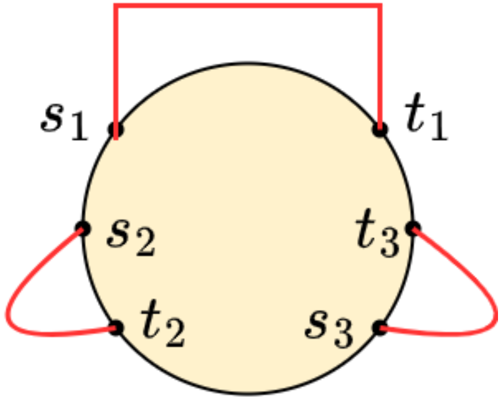
合計長 7 の解が 4 個, $\cdots$

- 隣接行列の行列式が
閉路被覆に対応

同一面最短点素パス問題に対するアルゴリズム

(Datta et al. 2018)

$\det A_1[x] \leftrightarrow$  $\leftrightarrow$ 



イメージ

$3x^5 + 4x^7 + \cdots$ の場合

合計長 5 の解が 3 個,

合計長 7 の解が 4 個, $\cdots$

- 隣接行列の行列式が**閉路被覆**に対応

同一面最短点素パス問題に対するアルゴリズム

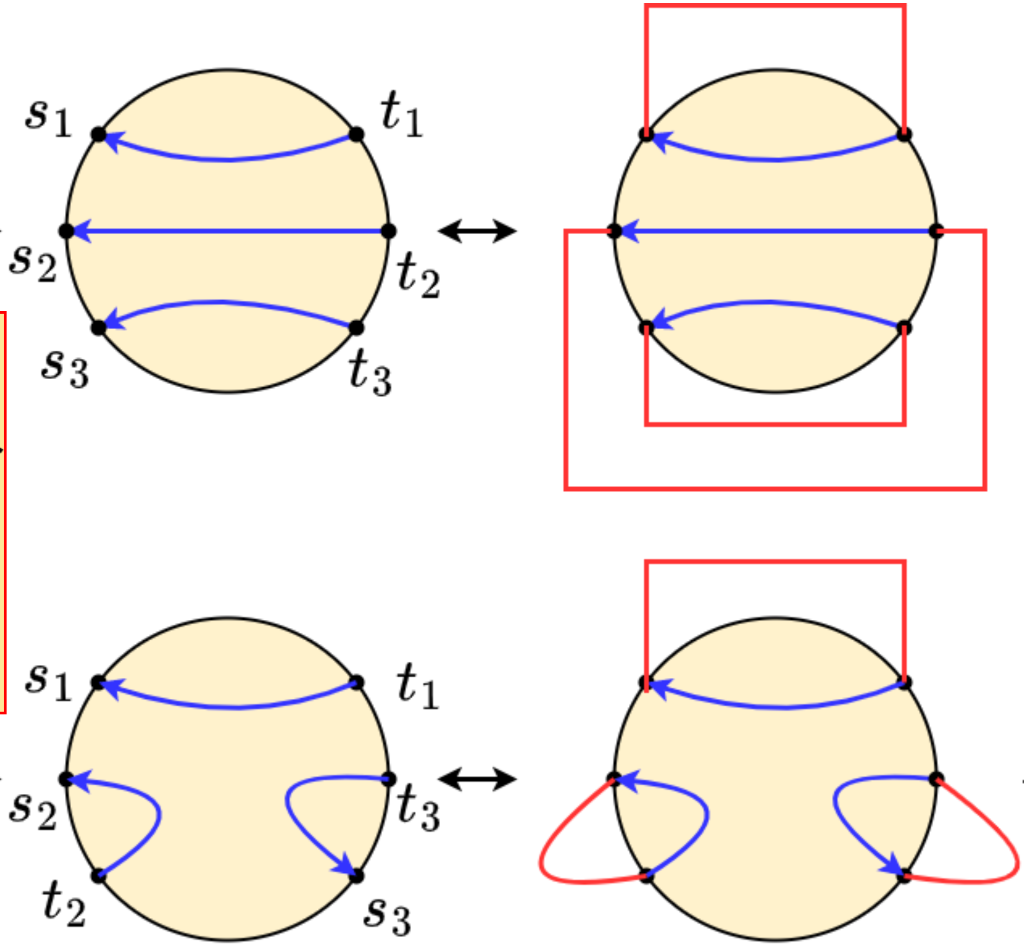
(Datta et al. 2018)

$\det A_1[x] \longleftrightarrow$

イメージ

$3x^5 + 4x^7 + \cdots$ の場合
合計長 5 の解が 3 個,
合計長 7 の解が 4 個, $\cdots$

$\det A_2[x] \longleftrightarrow$

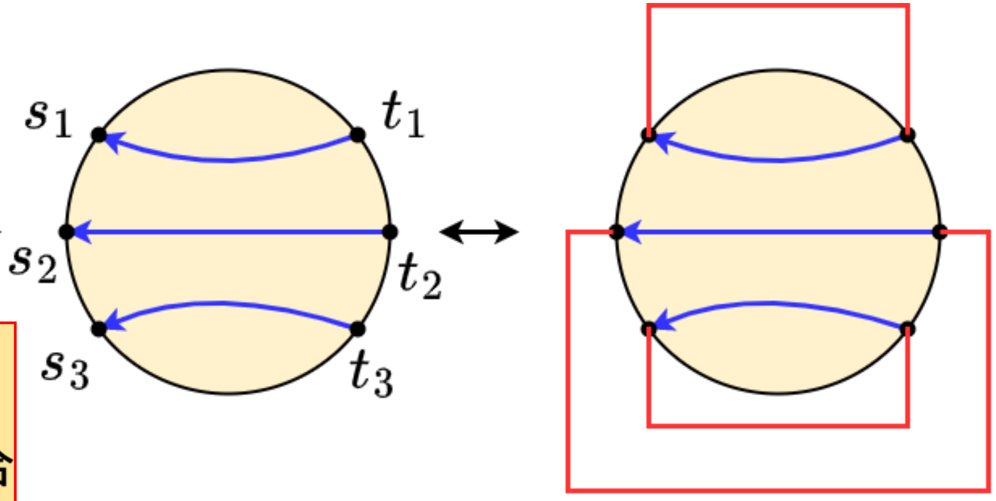


- 隣接行列の行列式が**閉路被覆**に対応

同一面最短点素パス問題に対するアルゴリズム

(Datta et al. 2018)

$\det A_1[x] \longleftrightarrow$



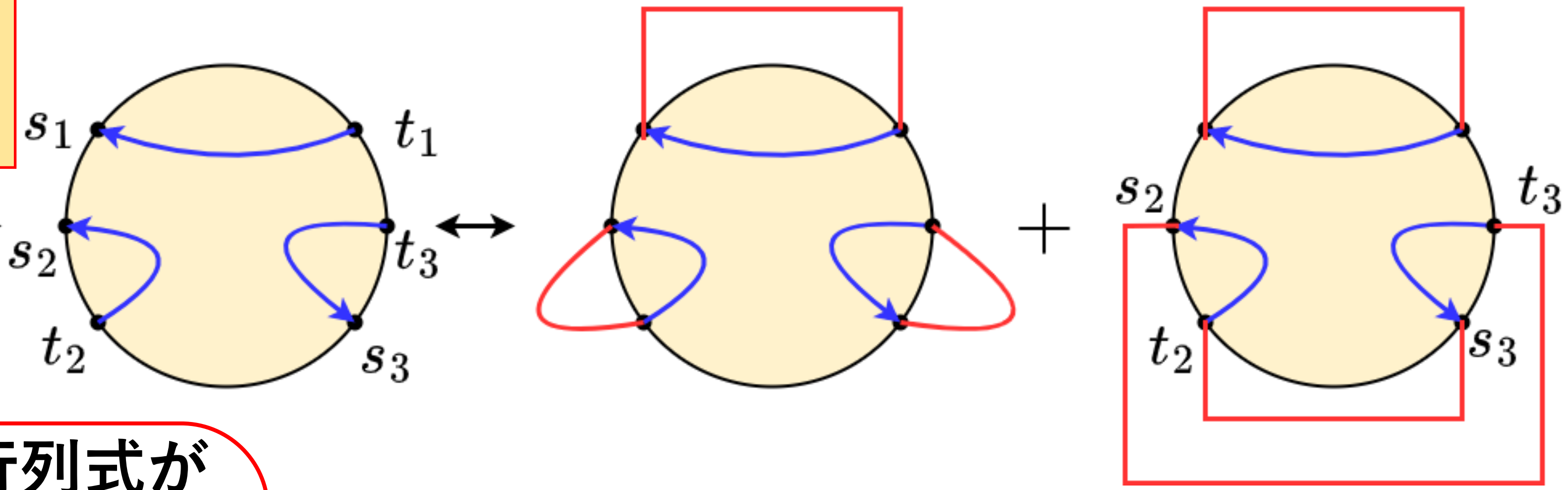
イメージ

$3x^5 + 4x^7 + \cdots$ の場合

合計長 5 の解が 3 個,

合計長 7 の解が 4 個, $\cdots$

$\det A_2[x] \longleftrightarrow$

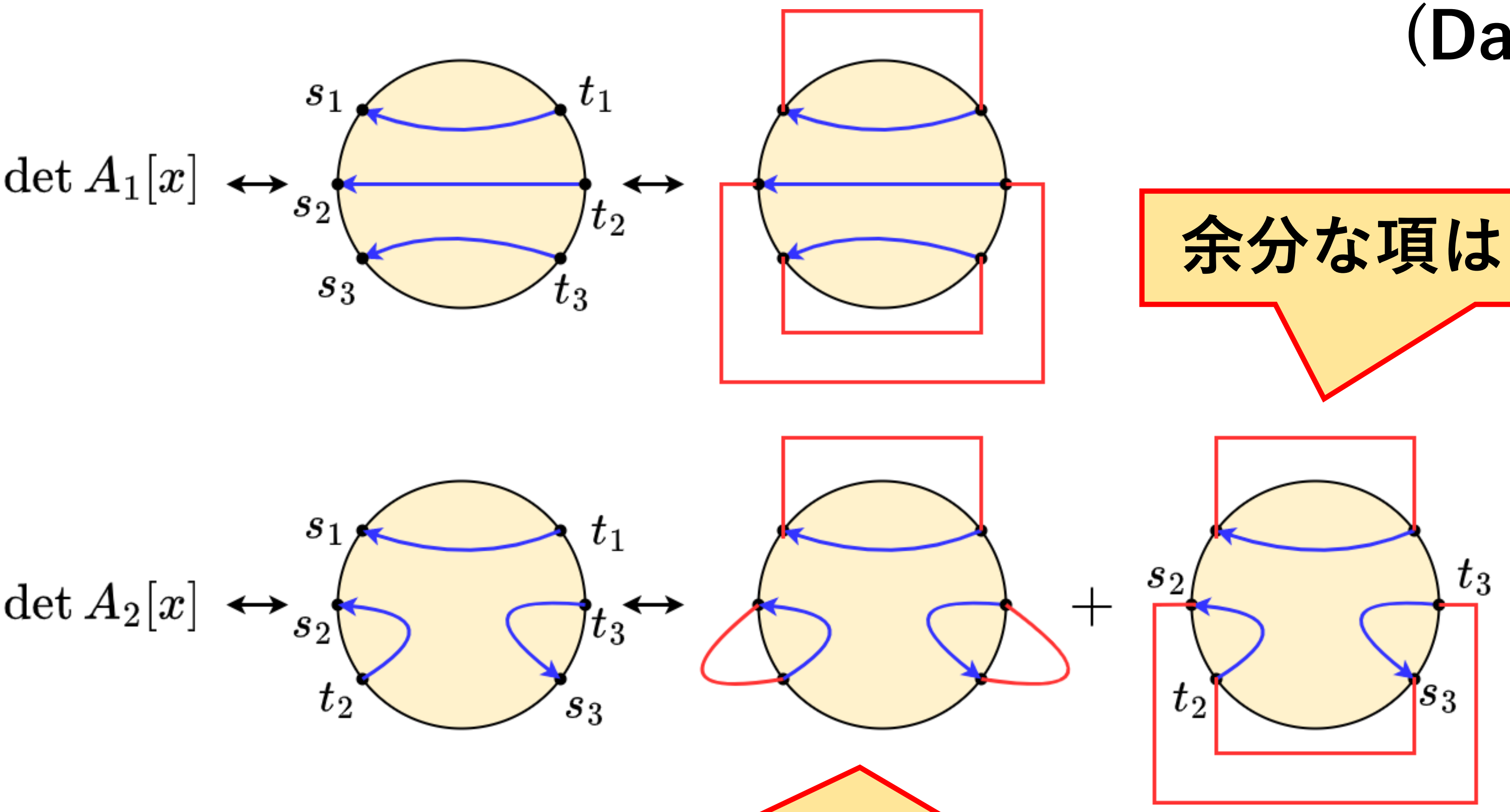


余分な項

- 隣接行列の行列式が
  閉路被覆に対応

同一面最短点素パス問題に対するアルゴリズム

(Datta et al. 2018)



余分な項は det A_1 に対応

det $A_2[x]$ − det $A_1[x]$ の最小次数の項が最短点素パスに対応

目次

- 先行研究
  - 点素パス問題
  - 最短点素パス問題
  - 同一面最短点素パス問題
- 本研究 : 除外ターミナルを含む同一面最短点素パス問題
- アイデア
  - $(A + B)$-パスと頂点対のペアリングの対応
- 結論

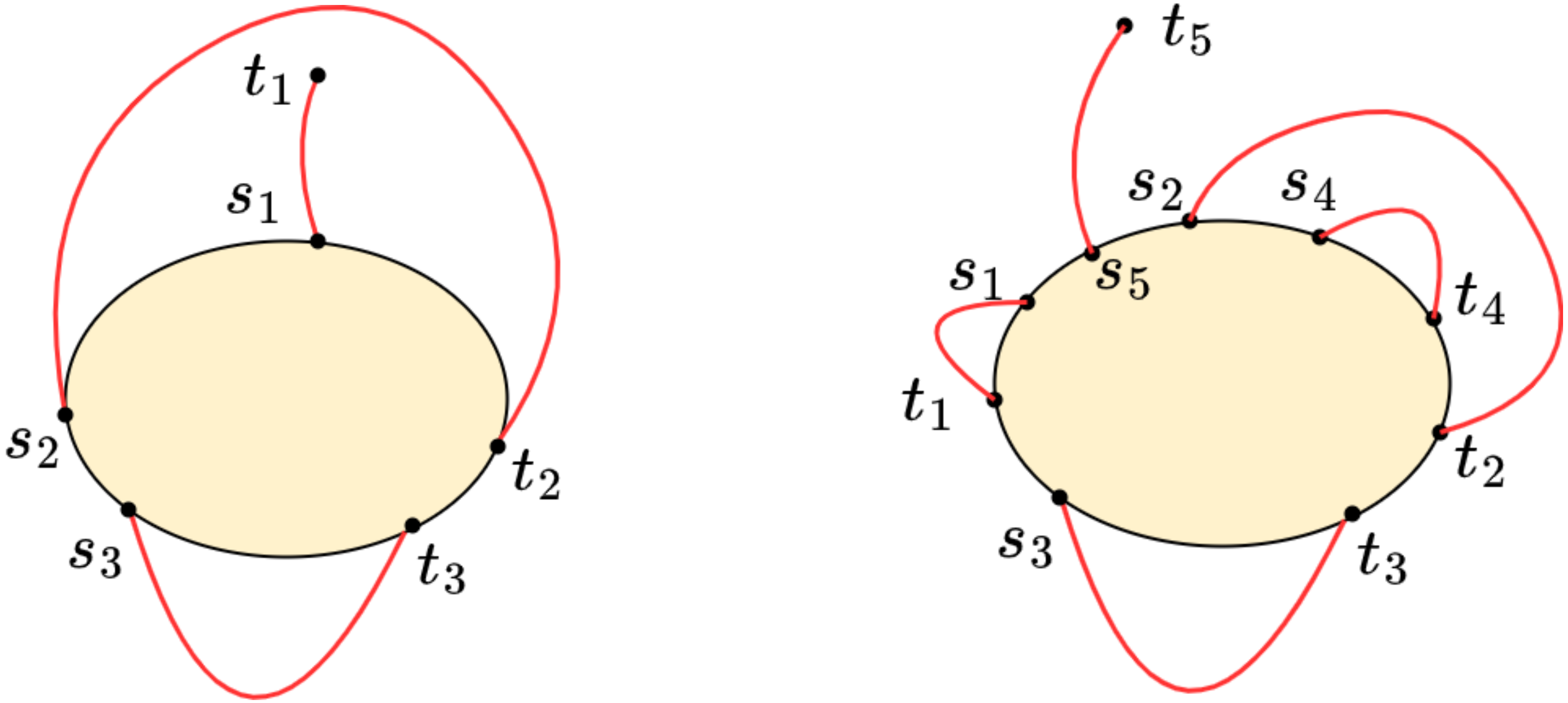
除外ターミナルを含む同一面最短点素パス問題

入力： 平面グラフ, 頂点対 $(s_1, t_1), \ldots, (s_k, t_k)$

一つのターミナルだけは共通の面上になくても良い

出力： 点素なパス $P_1, \ldots, P_k\ (P_i : s_i \to t_i)$

s.t. パスの合計の長さが最小



主結果

定理

頂点対数 k：定数

除外ターミナルを含む同一面最短点素パス問題は**乱択多項式時間アルゴリズム**で解ける

意義

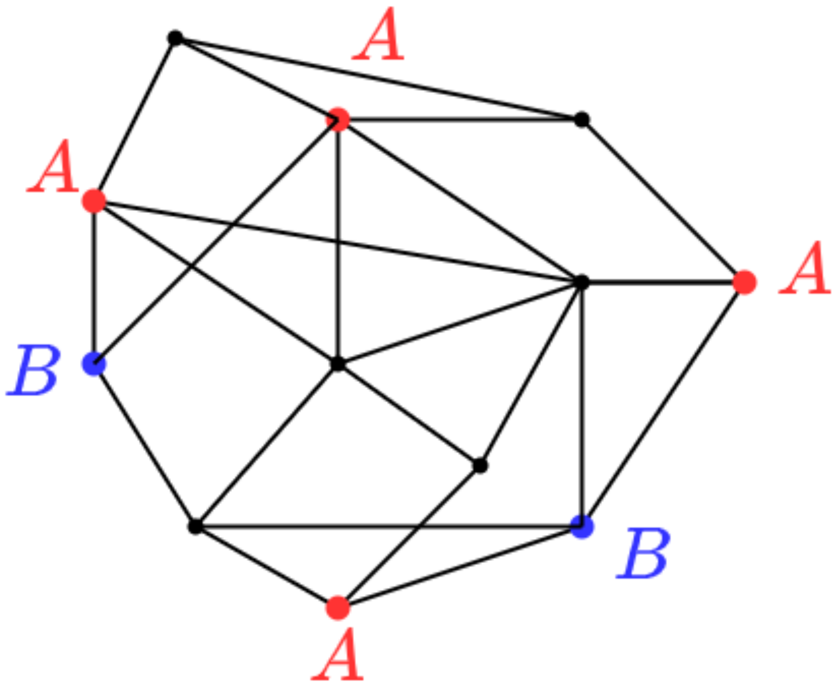
- Datta et al. 2018 の問題設定を拡張

手法

- 同一面最短点素パス問題［Datta et al. 2018］
- 最短点素 $(A+B)$-パス問題［Hirai & Namba 2018］
- $(A+B)$-パス ⟺ 頂点対のペアリングの対応（組合せ論的アイデア：カタラン数と関係）

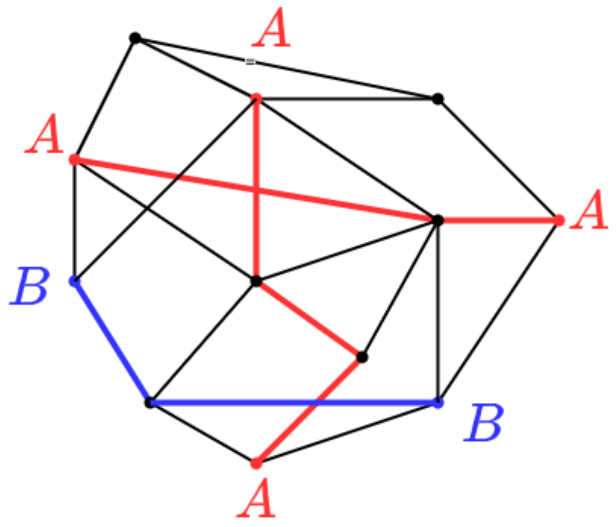
最短点素 $(A+B)$-パス問題 (Hirai & Namba 2018)

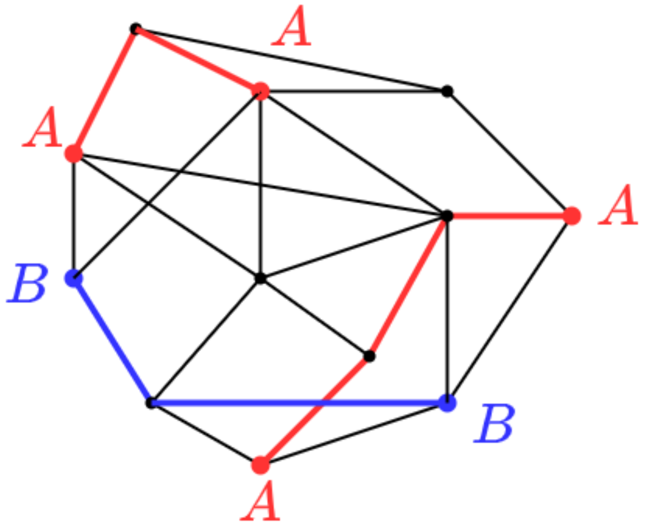
入力： 偶数サイズの**頂点集合** $\boldsymbol{A, B \subseteq V}$
出力： **点素な τ =|A|/2 + |B|/2 本のパス**
s.t. パスの合計の長さが最小
パスの端点は両方Aに属す or 両方Bに属す



最短点素 $(A+B)$-パス問題 (Hirai & Namba 2018)

入力： 偶数サイズの**頂点集合** $\boldsymbol{A, B \subseteq V}$
出力： **点素な $\boldsymbol{\tau}$ =|A|/2 + |B|/2 本のパス**
s.t. パスの合計の長さが最小
パスの端点は両方Aに属す or 両方Bに属す

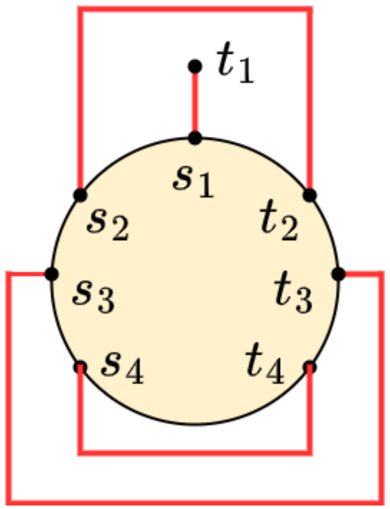




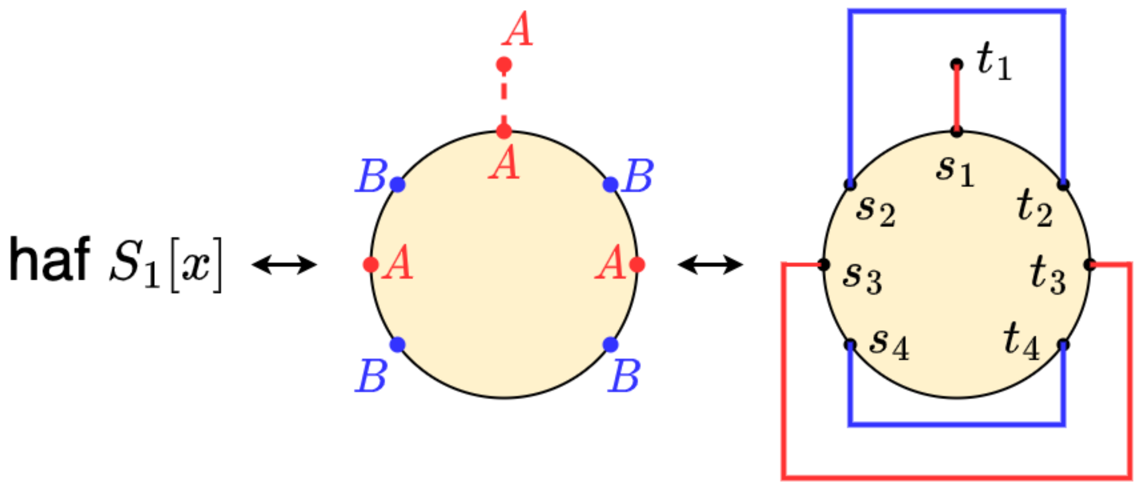
定理
全ての点素$(A+B)$-パスに対応する一つの多項式を多項式時間で計算できる

mod $2^{\tau+1}$の**ハフニアン**の利用

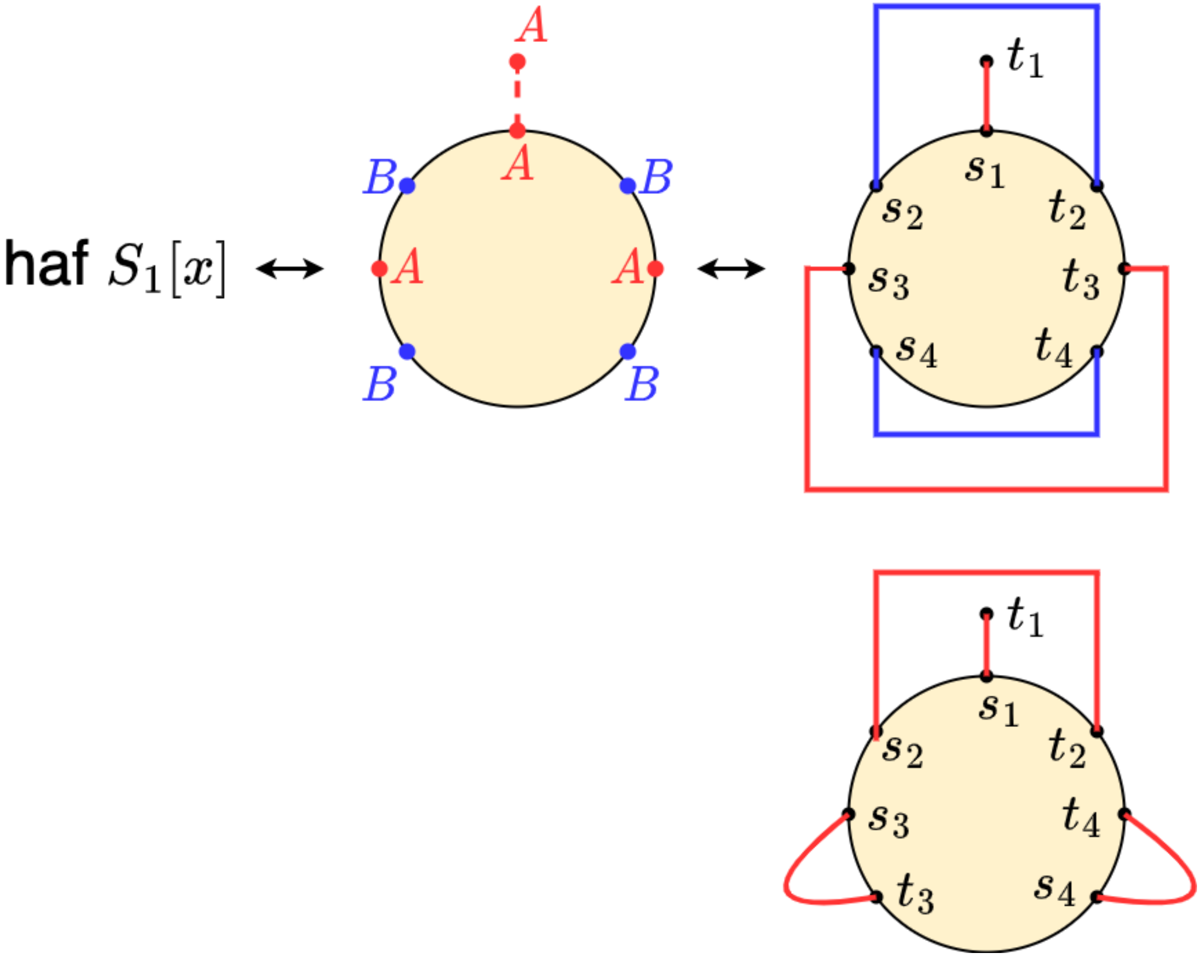
除外ターミナルを含む同一面最短点素パス問題に対するアルゴリズム



除外ターミナルを含む同一面最短点素パス問題に対するアルゴリズム

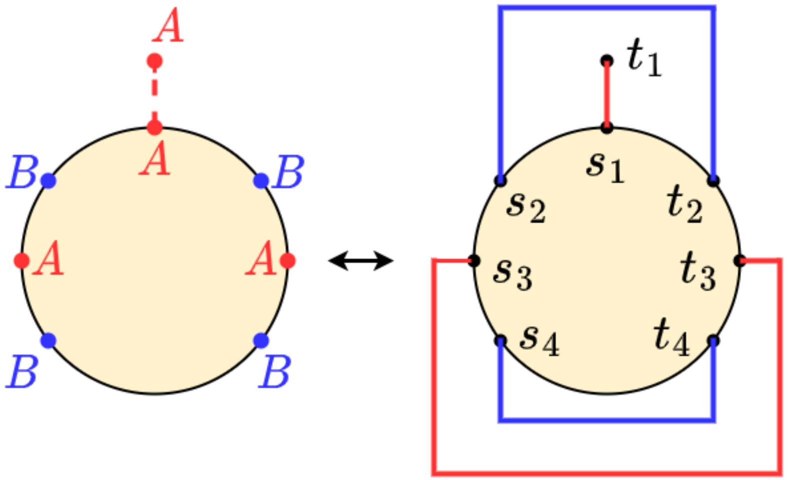


除外ターミナルを含む同一面最短点素パス問題に対するアルゴリズム

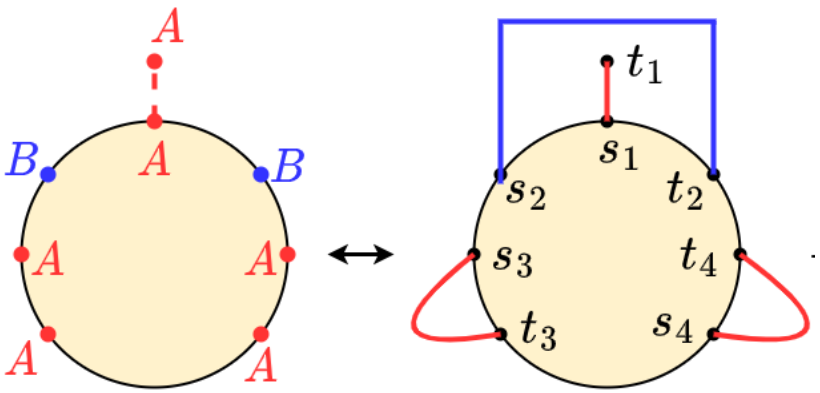


除外ターミナルを含む同一面最短点素パス問題に対するアルゴリズム

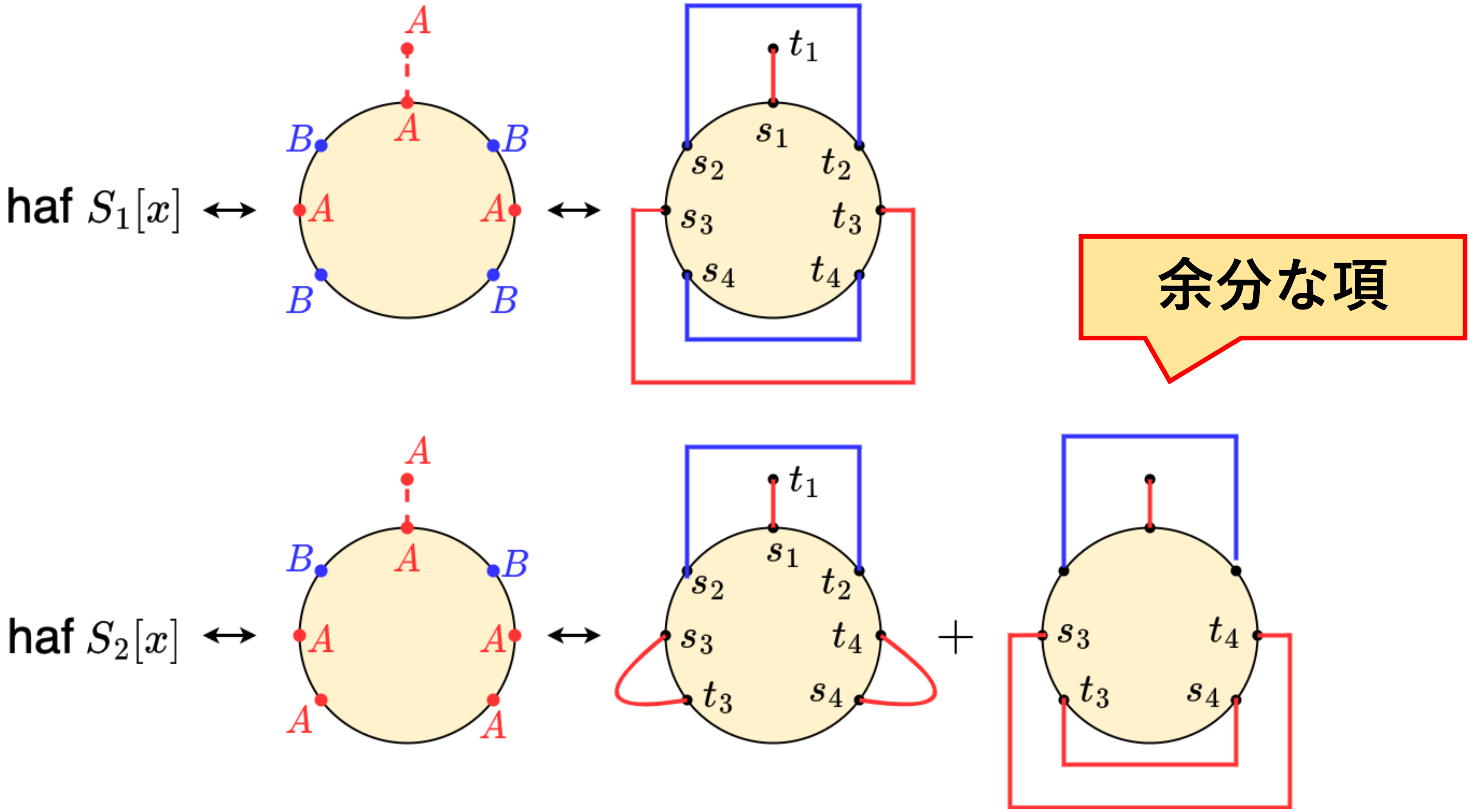
haf $S_1[x] \leftrightarrow$



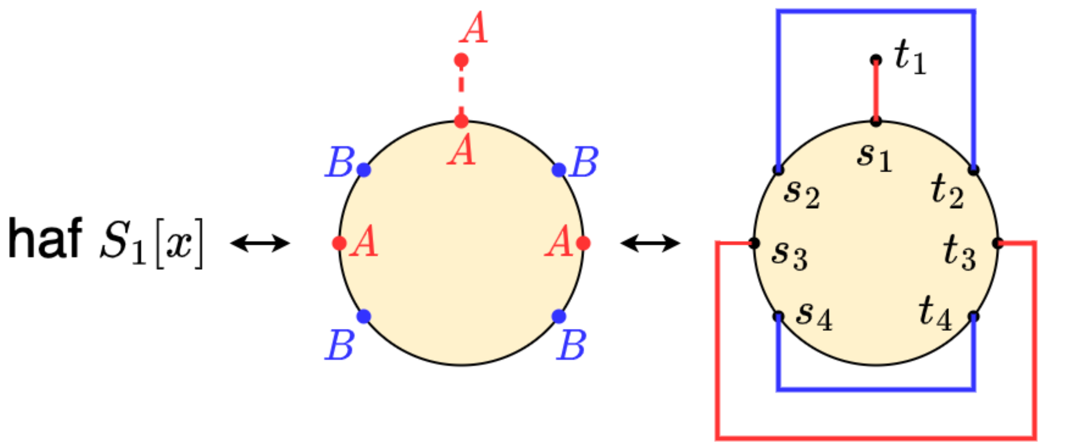
haf $S_2[x] \leftrightarrow$



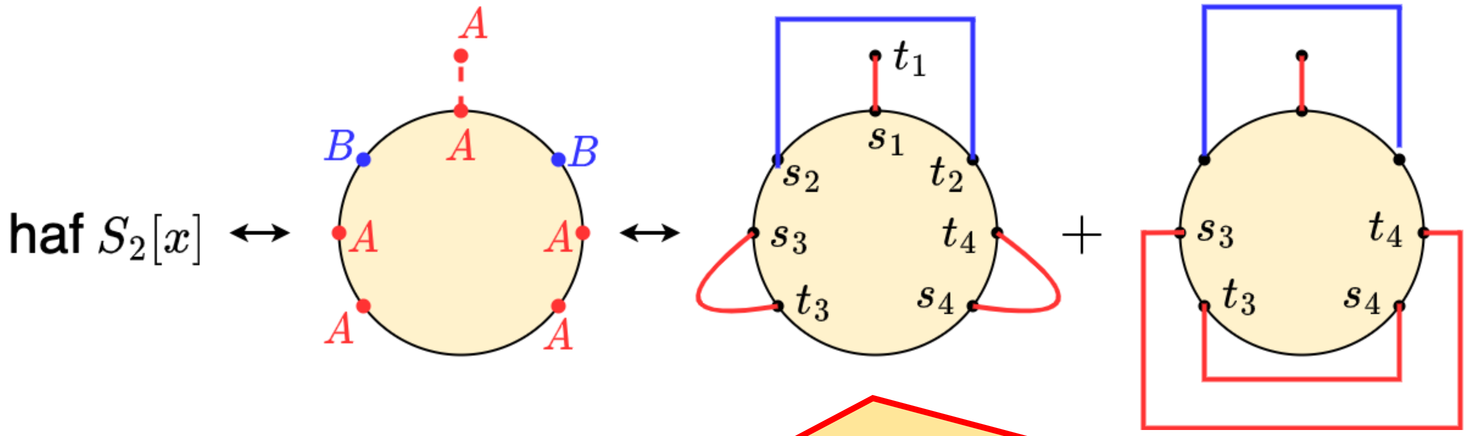
除外ターミナルを含む同一面最短点素パス問題に対するアルゴリズム



除外ターミナルを含む同一面最短点素パス問題に対するアルゴリズム

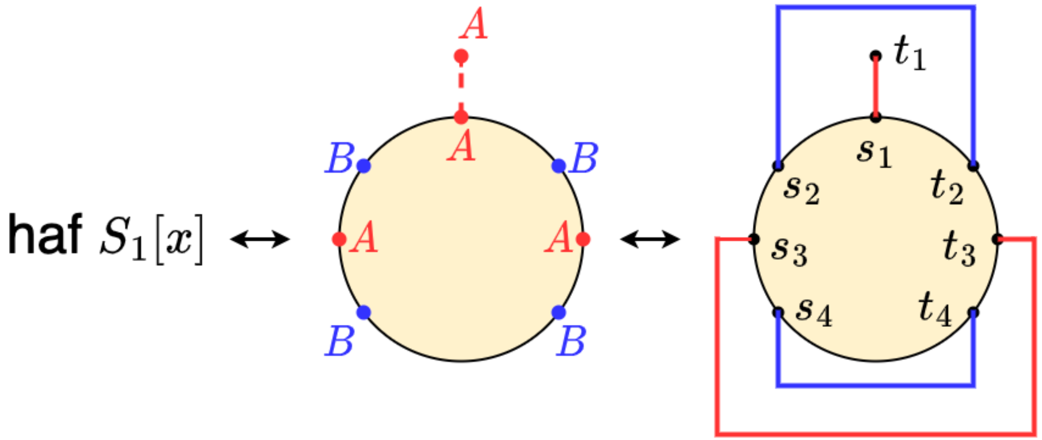


余分な項は haf S_1 に対応

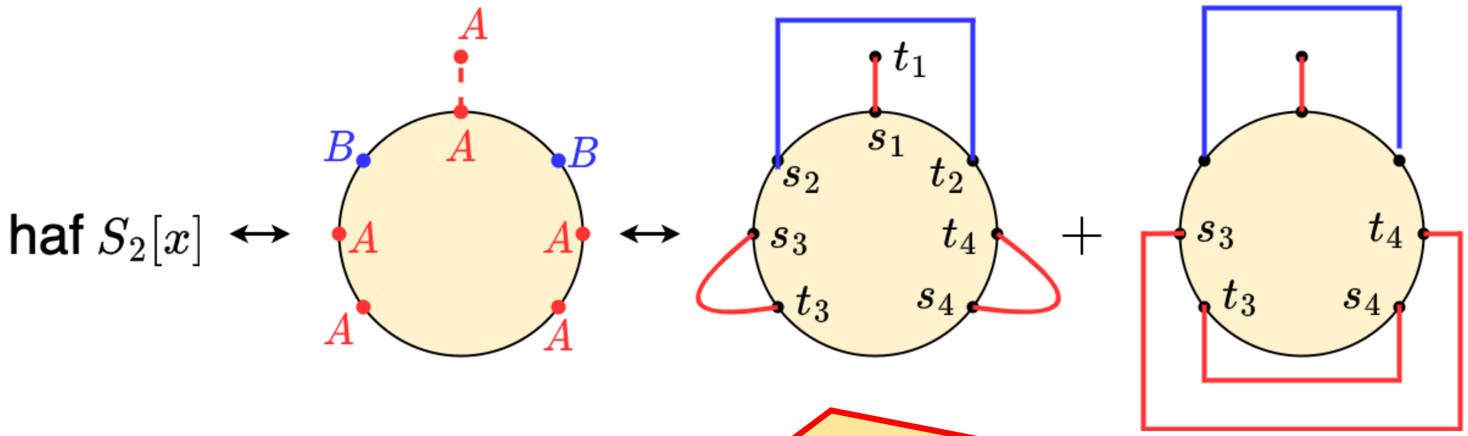


haf $S_2[x]$ − haf $S_1[x]$ の最小次数の項が最短点素パスに対応

除外ターミナルを含む同一面最短点素パス問題に対するアルゴリズム



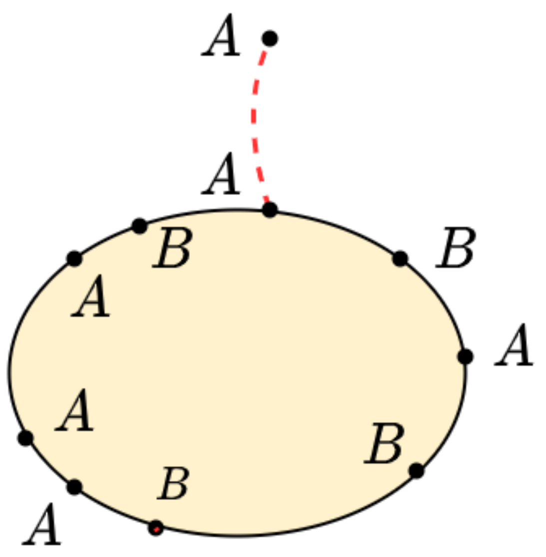
余分な項は haf S_1 に対応



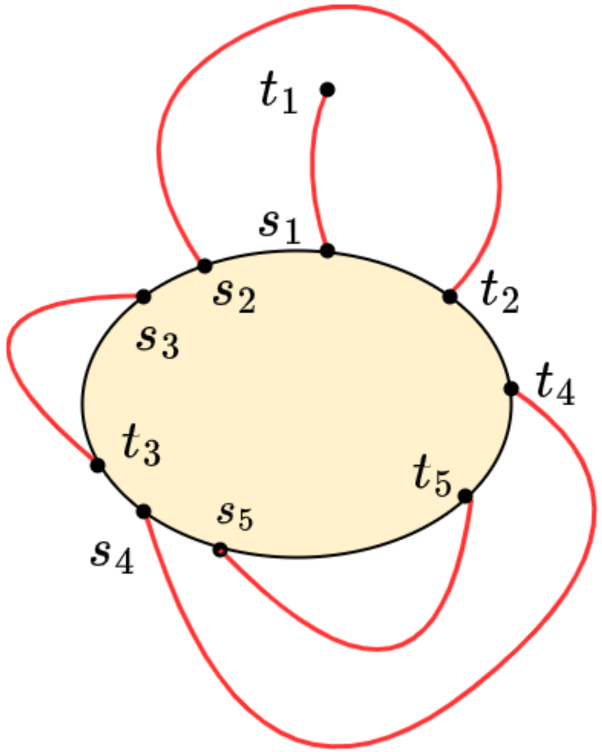
- mod 2^{k+1} のハフニアン
- 最適解が一意になるように摂動（乱択）

haf $S_2[x]$ − haf $S_1[x]$ の最小次数の項が最短点素パスに対応

$(\mathbf{A+B})$-分割と頂点対のペアリングの対応



(+1, +1, -1, +1, +1, -1, -1, -1)



バロット列

■ **カタラン数** 個
cf) 括弧列の個数

目次

- 先行研究
  - 点素パス問題
  - 最短点素パス問題
  - 同一面最短点素パス問題
- 本研究：除外ターミナルを含む同一面最短点素パス問題
- アイデア
  - $(A+B)$-パスと頂点対のペアリングの対応
- 結論

結論

- **除外ターミナルを含む同一面最短点素パス問題**の提案
- **乱択多項式時間アルゴリズム**を得た
  - **最短点素(A + B)-パス**と**同一面最短点素パス**の組合せ
  - **(A + B)-パスと頂点対のペアリングの対応**という**組合せ論的**発想

Q. 決定的多項式時間アルゴリズム
Q. 同一面以外にあるターミナルが2つ以上の場合
Q. ターミナルが2面に任意の順でのっている場合