除外ターミナルを含む同一面最短点素パス問題に対するアルゴリズム

寺尾 樹哉 , 小林 佑輔

京都大学数理解析研究所

日本応用数理学会第19回 研究部会連合発表会＠岡山理科大学　3月9日(木)

目次

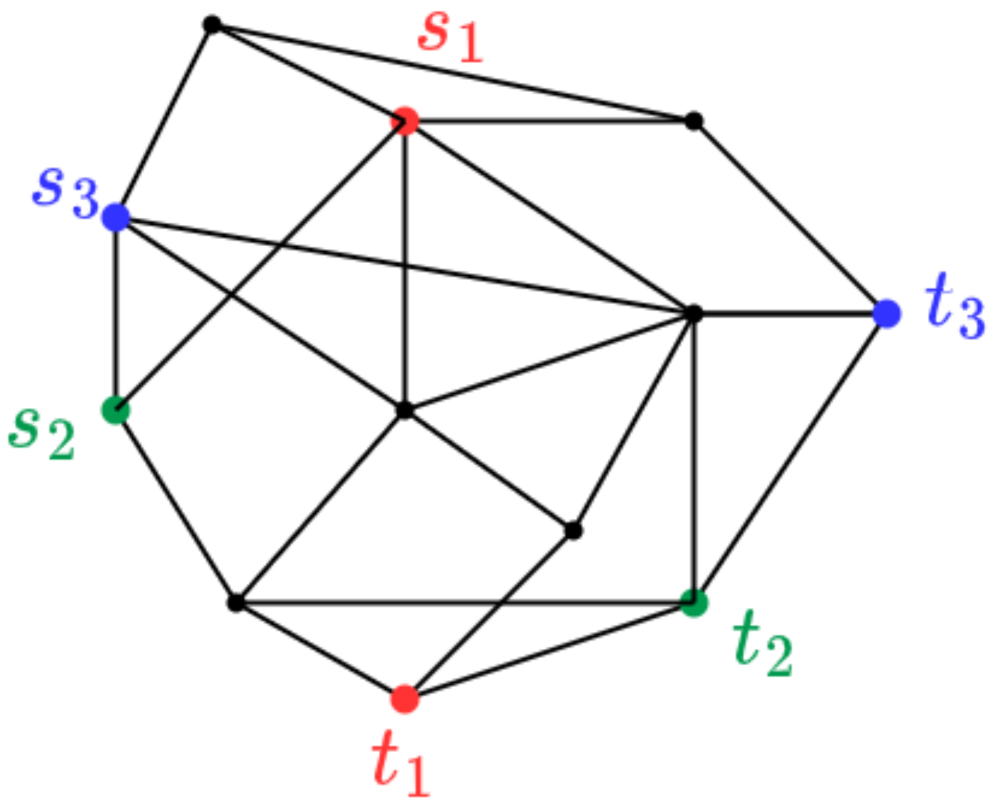
- 先行研究
  - 点素パス問題
  - 最短点素パス問題
  - 同一面最短点素パス問題
- 本研究 : 除外ターミナルを含む同一面最短点素パス問題
- アイデア
  - $(A + B)$-パスと頂点対のペアリングの対応
- 結論

目次

- 先行研究
  - 点素パス問題
  - 最短点素パス問題
  - 同一面最短点素パス問題
- 本研究：除外ターミナルを含む同一面最短点素パス問題
- アイデア
  - $(A+B)$-パスと頂点対のペアリングの対応
- 結論

点素パス問題

<u>入力</u>： **頂点対** $(s_1, t_1), \ldots, (s_k, t_k)$

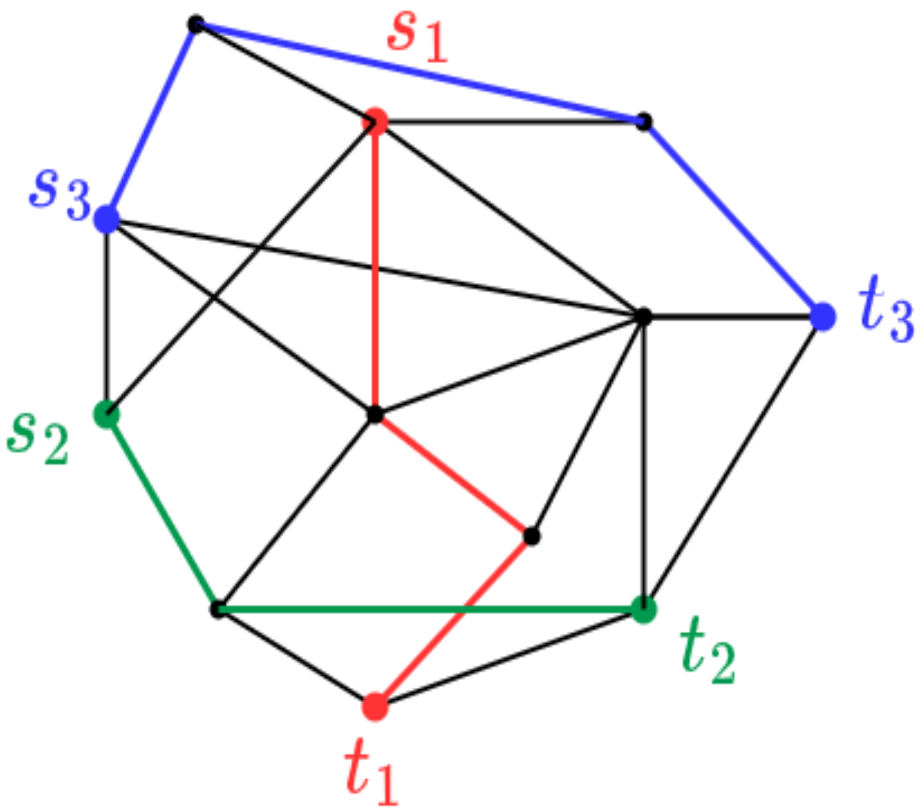


点素パス問題

パス同士が頂点を共有しない

入力： 頂点対 $(s_1, t_1), \ldots, (s_k, t_k)$

出力： 点素なパス $P_1, \ldots, P_k \; (P_i : s_i \to t_i)$



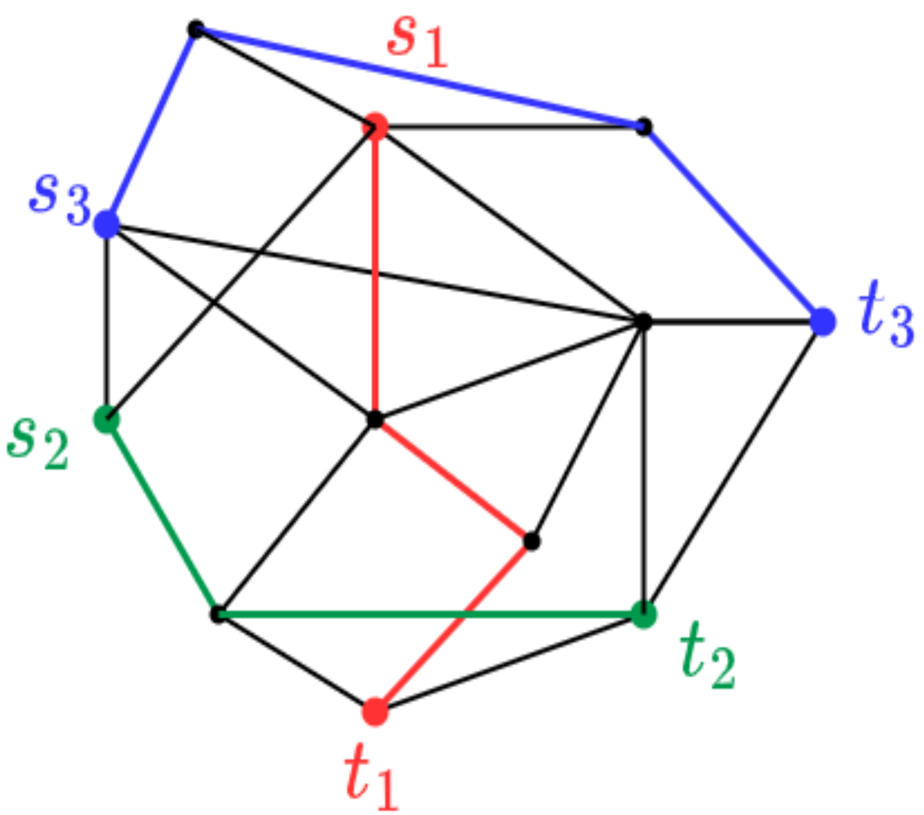
- 多くの応用がある
  例：集積回路の設計，ネットワークの設計
  （1980年代）

点素パス問題

パスが頂点を共有しない

入力： 頂点対 $(s_1, t_1), \ldots, (s_k, t_k)$

出力： 点素なパス $P_1, \ldots, P_k \; (P_i : s_i \to t_i)$



- 多くの応用がある
  例：集積回路の設計，ネットワークの設計
  （1980年代）
- 多項式時間で解けるか？が主な研究対象

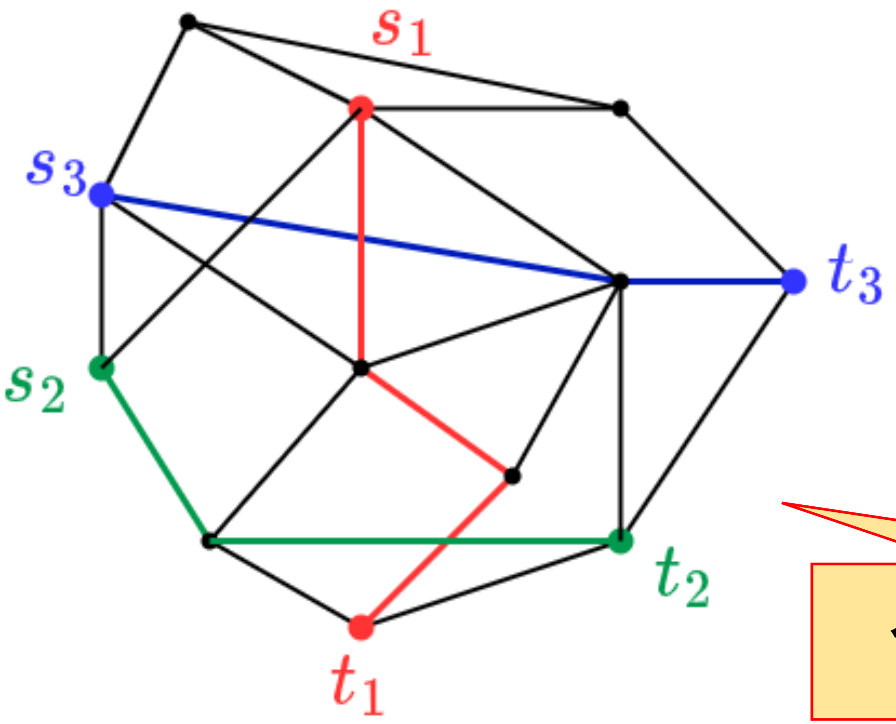
	有向グラフ	無向グラフ
k：定数	NP-困難 （Fortune et al.1980）	多項式時間 （Robertson & Seymour 1995）
k：変数	NP-困難 （Karp 1975）	NP-困難 （Karp 1975）

最短点素パス問題

入力： 頂点対 $(s_1, t_1), \ldots, (s_k, t_k)$

出力： 点素なパス $P_1, \ldots, P_k \; (P_i : s_i \to t_i)$

s.t. パスの合計の長さが最小



- 自然な最適化問題
- 頂点対数 k : 定数 , 無向グラフ
- 多くのケースで理論的計算量が未解明
  多項式時間で解けるか？NP困難か？

合計長 : 3 + 2 + 2 = 7

最短点素パス問題が多項式時間で解けるケース(1)

- **頂点対数 $k = 2$ のとき 乱択多項式時間アルゴリズム**

  (Björklund & Husfeldt 2014)

  mod 4 の**パーマネント**の利用

- **$k = 2$, 平面グラフ, 全頂点の次数が3以下のとき 決定的多項式時間アルゴリズム**

  (Björklund & Husfeldt 2018)

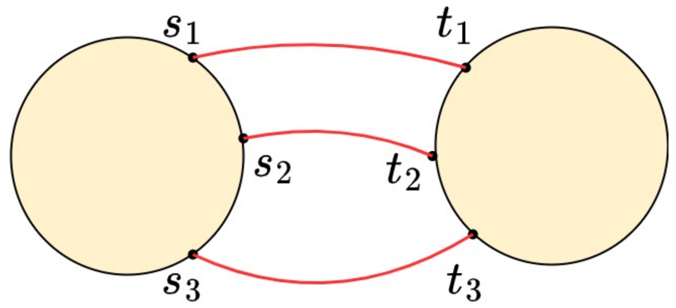
  パフィアンの利用

解法の鍵：多項式行列を用いた代数的手法

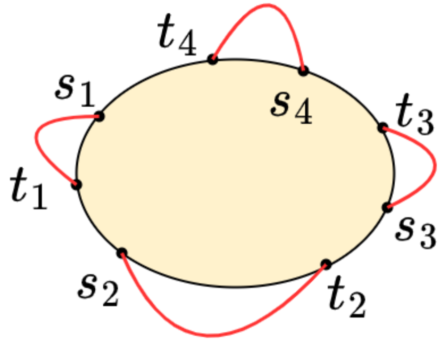
最短点素パス問題が多項式時間で解けるケース(2)

平面グラフで，頂点対に制約がある場合

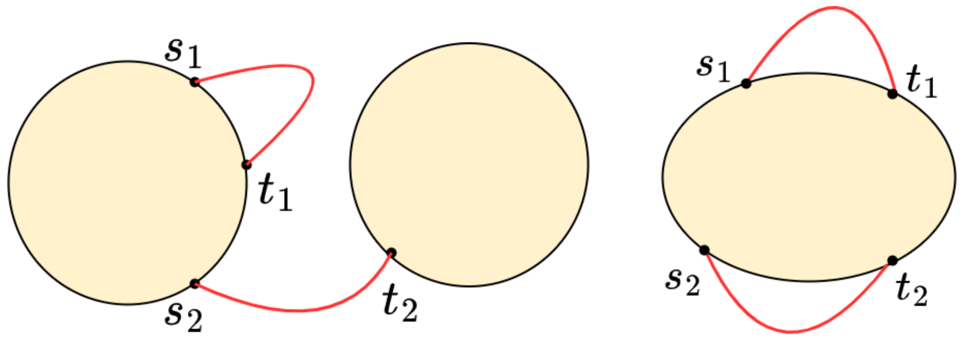
- **$s_1, ..., s_k$ が一面上で $t_1, ..., t_k$ が他の一面上**
(Colin de Verdière & Schrijver, 2011)

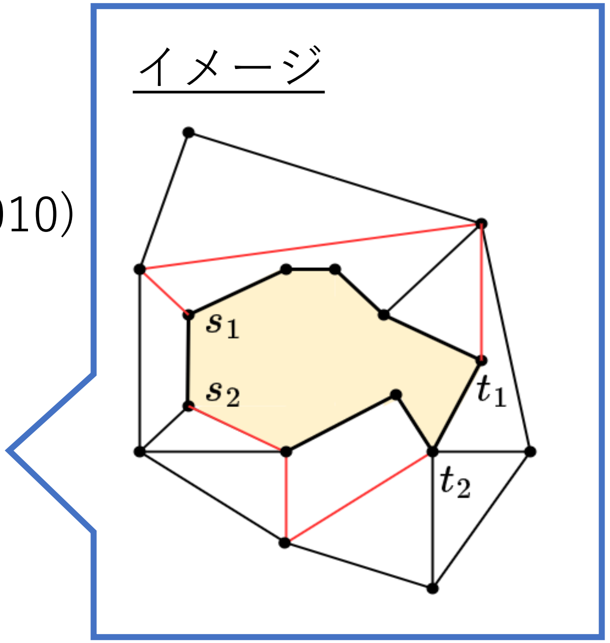


- **$s_1, t_1, ..., s_k, t_k$ の順で共通の一面上**
(Borradile et al. 2015)

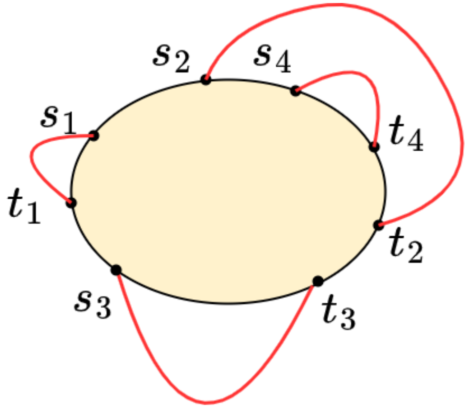


- **$k = 2$, 頂点対が高々 2 面上**
(Kobayashi & Sommer, 2010)





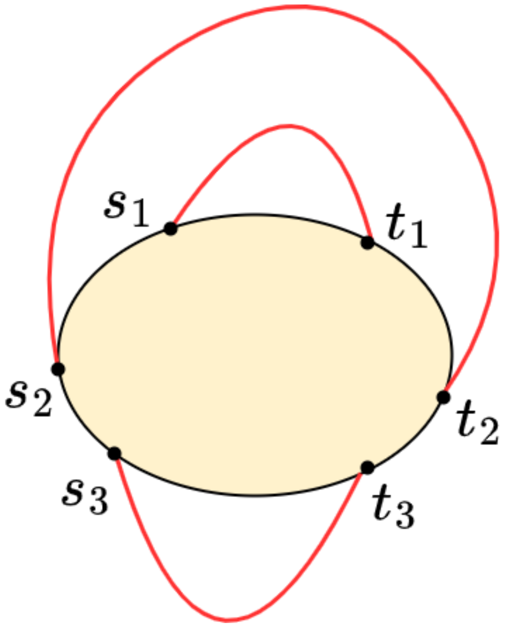
- **ターミナルが共通の一面上**
(Datta et al. 2018)

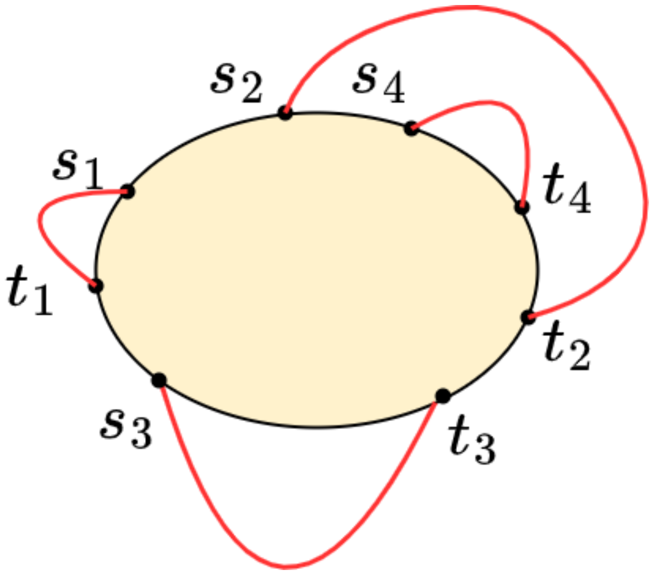


同一面最短点素パス問題 (Datta et al. 2018)

入力： 平面グラフ, 頂点対 $(s_1, t_1), \ldots, (s_k, t_k)$
全てのターミナルが共通の面上

出力： 点素なパス $P_1, \ldots, P_k \; (P_i : s_i \to t_i)$
s.t. パスの合計の長さが最小





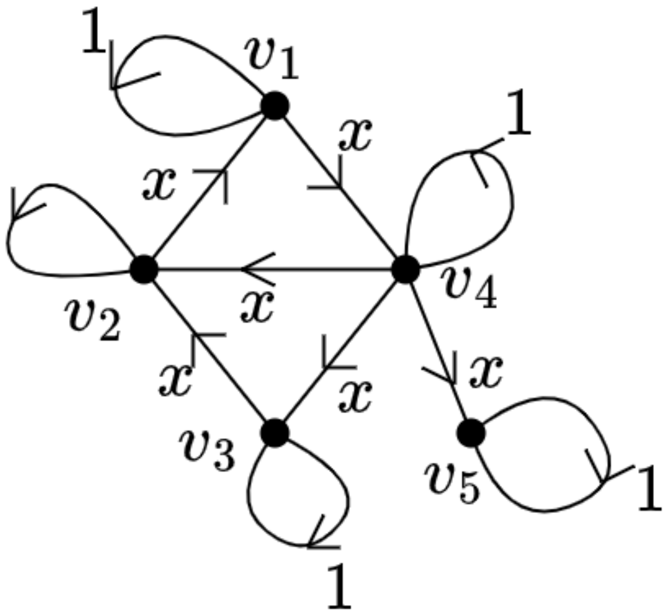
同一面最短点素パス問題に対するアルゴリズム

(Datta et al. 2018)

観察

隣接行列の行列式の展開項は有向グラフの**閉路被覆**に対応

$$\det A[x] = \det \begin{bmatrix} 1 & & & x & \\ x & 1 & & & \\ & x & 1 & & \\ & x & x & 1 & x \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow$$



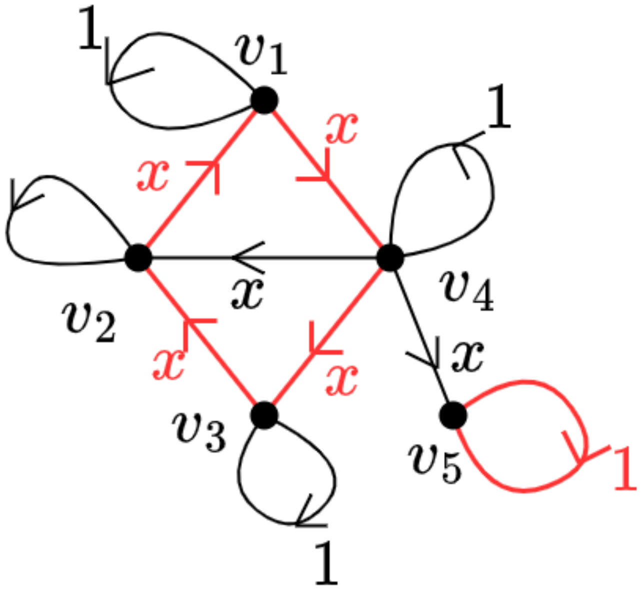
同一面最短点素パス問題に対するアルゴリズム

(Datta et al. 2018)

観察

隣接行列の行列式の展開項は有向グラフの閉路被覆に対応

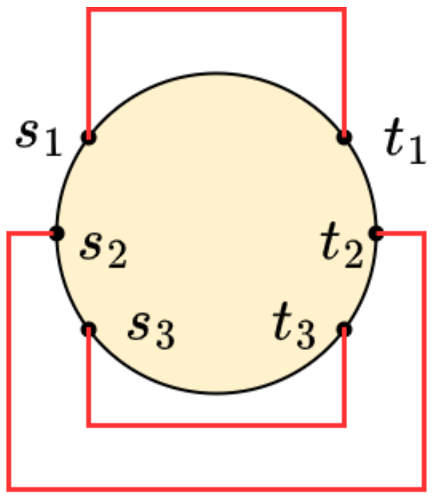
$$\det A[x] = \det \begin{bmatrix} 1 & & & x & \\ x & 1 & & & \\ & x & 1 & & \\ & x & x & 1 & x \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow$$



$$\det A[x] = -x^4 + \cdots$$

同一面最短点素パス問題に対するアルゴリズム

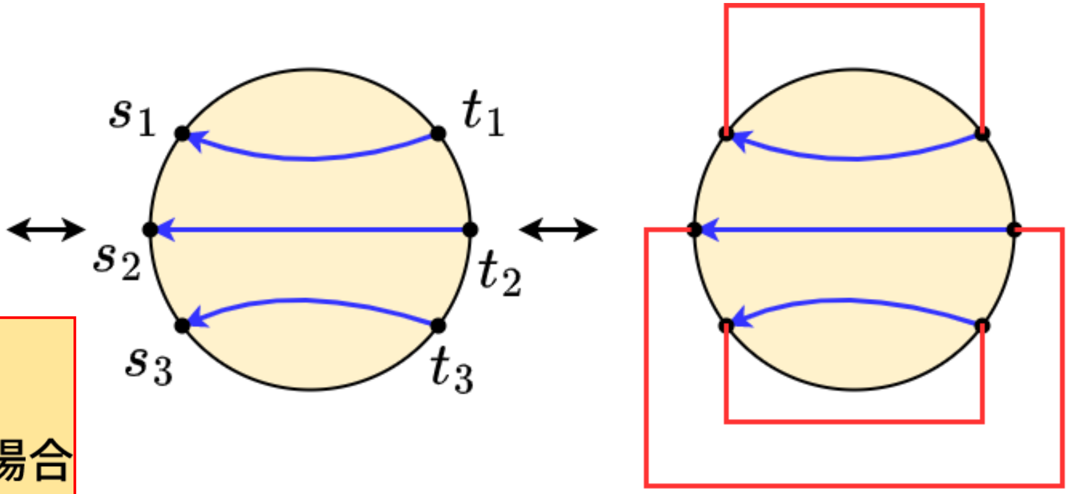
(Datta et al. 2018)



同一面最短点素パス問題に対するアルゴリズム

(Datta et al. 2018)

$\det A_1[x]$



イメージ

$3x^5 + 4x^7 + \cdots$ の場合

合計長 5 の解が 3 個,

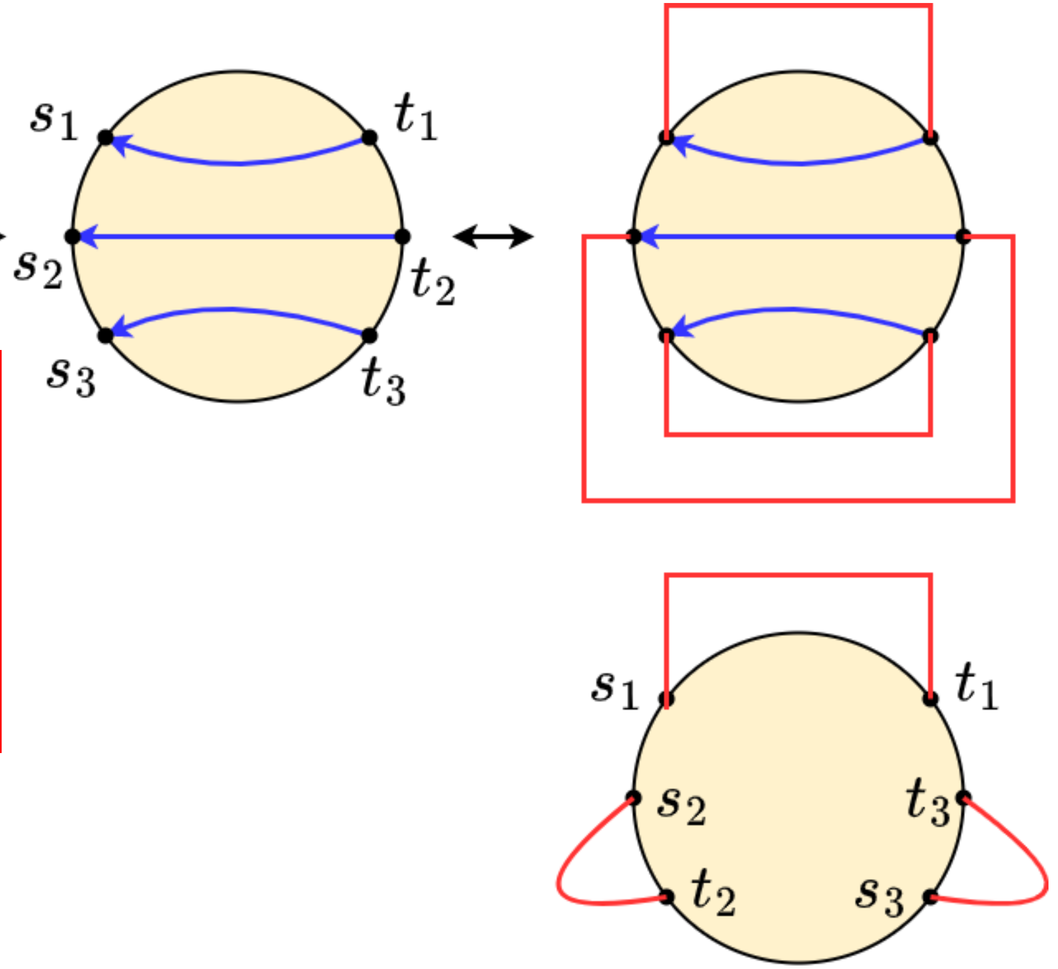
合計長 7 の解が 4 個, $\cdots$

隣接行列の行列式⟺**閉路被覆**

同一面最短点素パス問題に対するアルゴリズム

(Datta et al. 2018)

$\det A_1[x] \longleftrightarrow$



イメージ

$3x^5 + 4x^7 + \cdots$ の場合

合計長 5 の解が 3 個,

合計長 7 の解が 4 個, $\cdots$

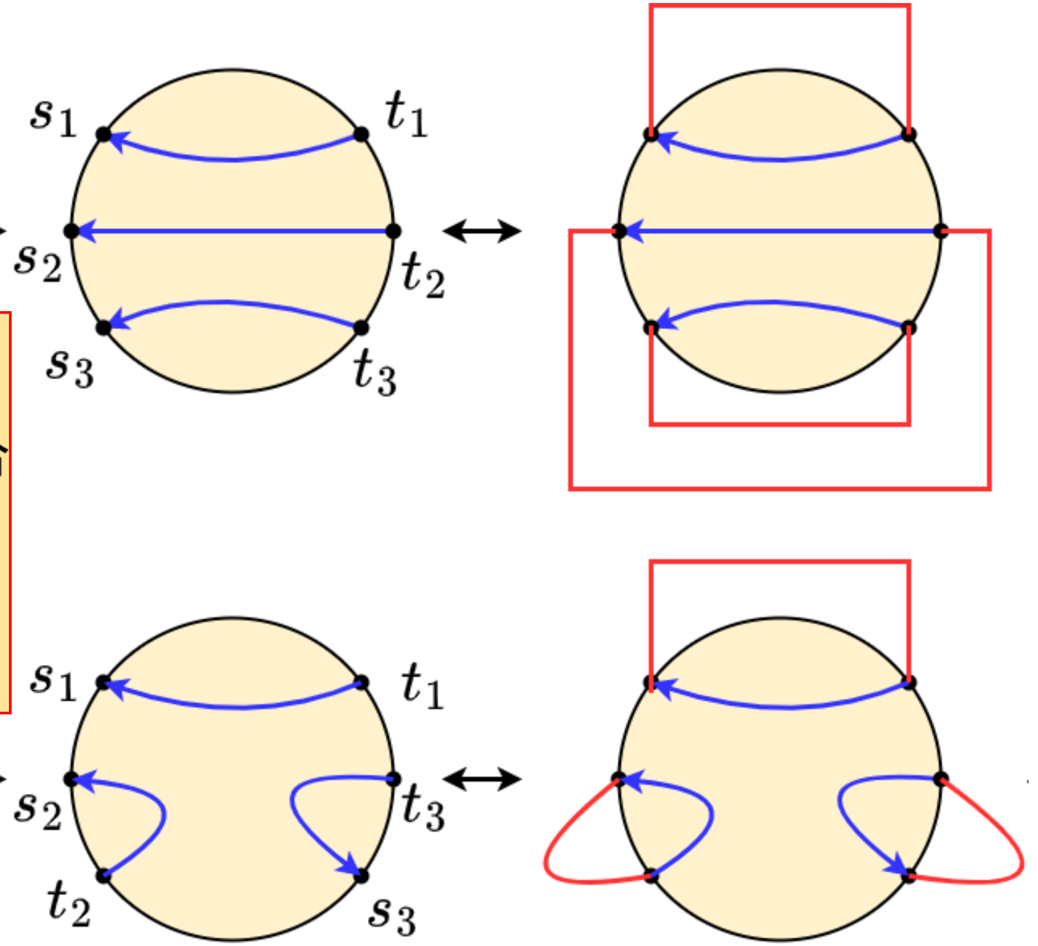
隣接行列の行列式⟺閉路被覆

同一面最短点素パス問題に対するアルゴリズム

(Datta et al. 2018)

$\det A_1[x] \longleftrightarrow$

$\det A_2[x] \longleftrightarrow$



イメージ

$3x^5 + 4x^7 + \cdots$ の場合

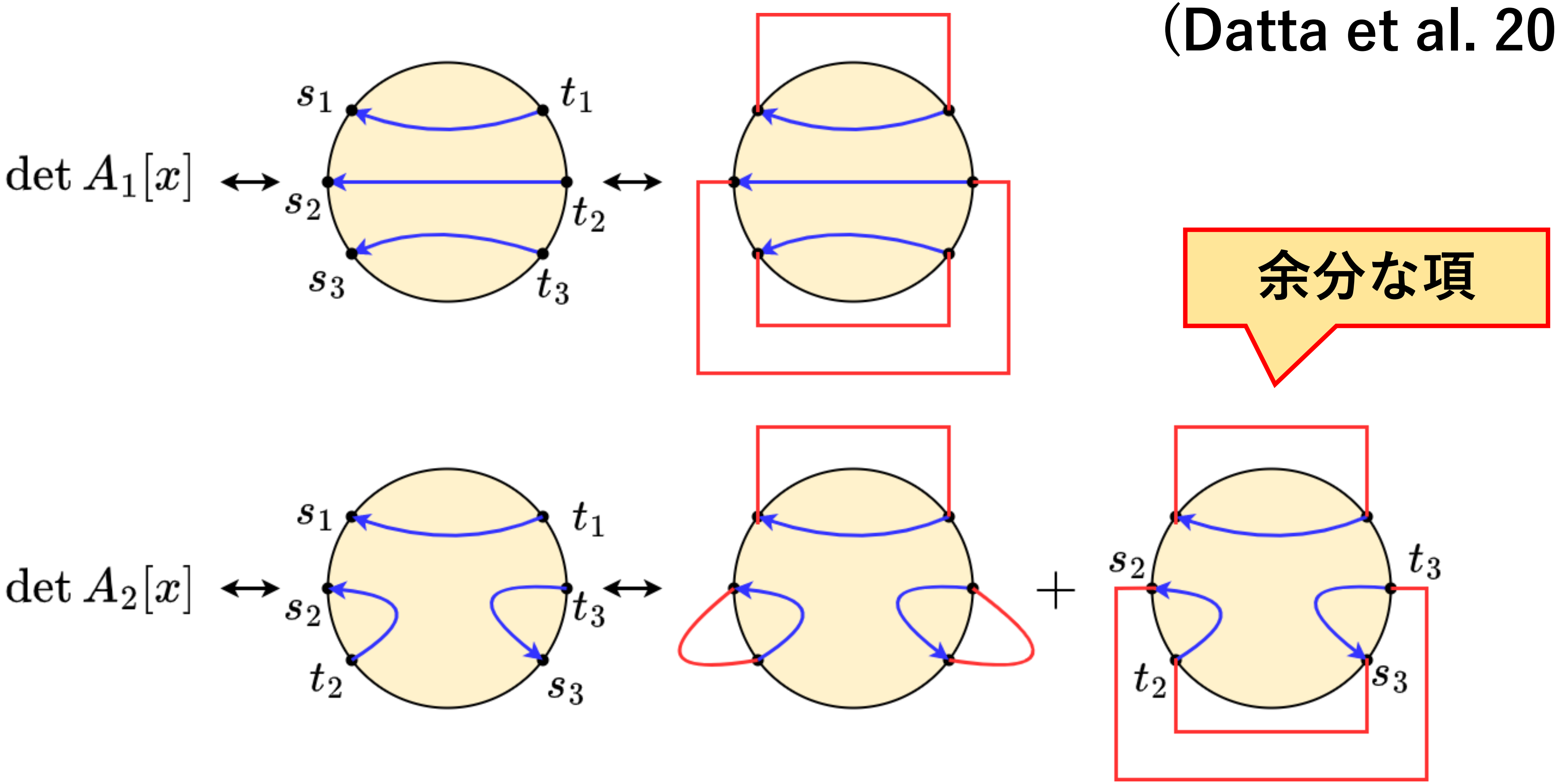
合計長 5 の解が 3 個,

合計長 7 の解が 4 個, $\cdots$

隣接行列の行列式⟺閉路被覆

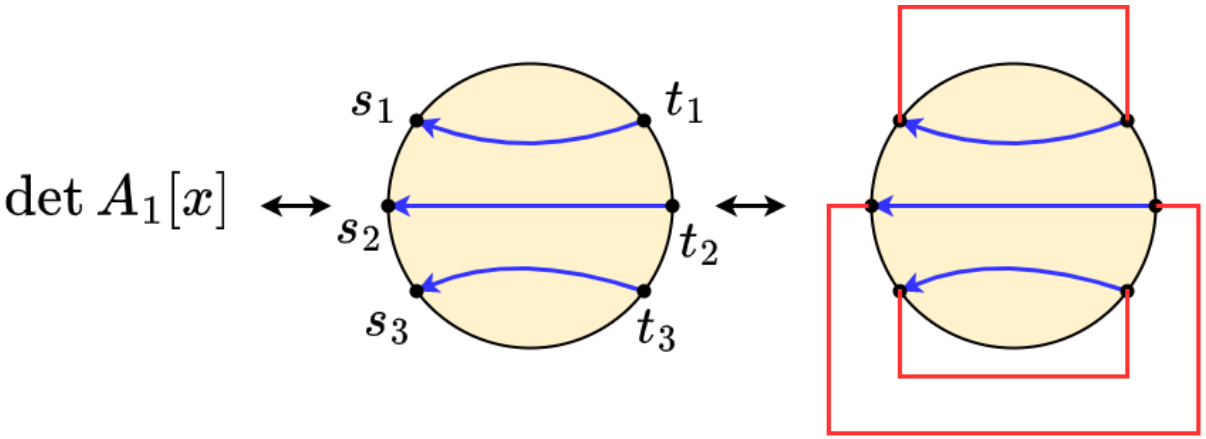
同一面最短点素パス問題に対するアルゴリズム

(Datta et al. 2018)

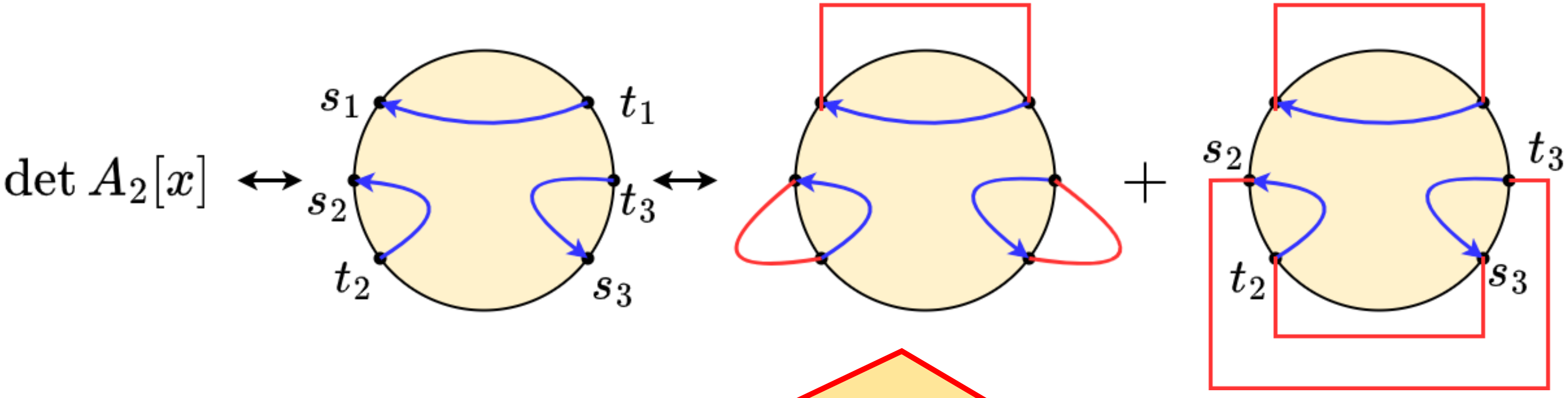


同一面最短点素パス問題に対するアルゴリズム

(Datta et al. 2018)



余分な項は $\det A_1$ に対応



$\det A_2[x] - \det A_1[x]$ の最小次数の項が
最短点素パスに対応

目次

- 先行研究
  - 点素パス問題
  - 最短点素パス問題
  - 同一面最短点素パス問題
- 本研究：除外ターミナルを含む同一面最短点素パス問題
- アイデア
  - $(A+B)$-パスと頂点対のペアリングの対応
- 結論

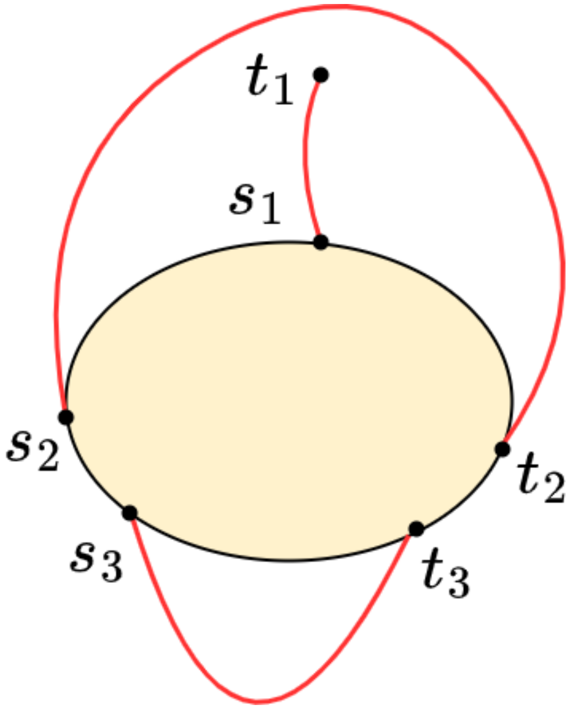
除外ターミナルを含む同一面最短点素パス問題

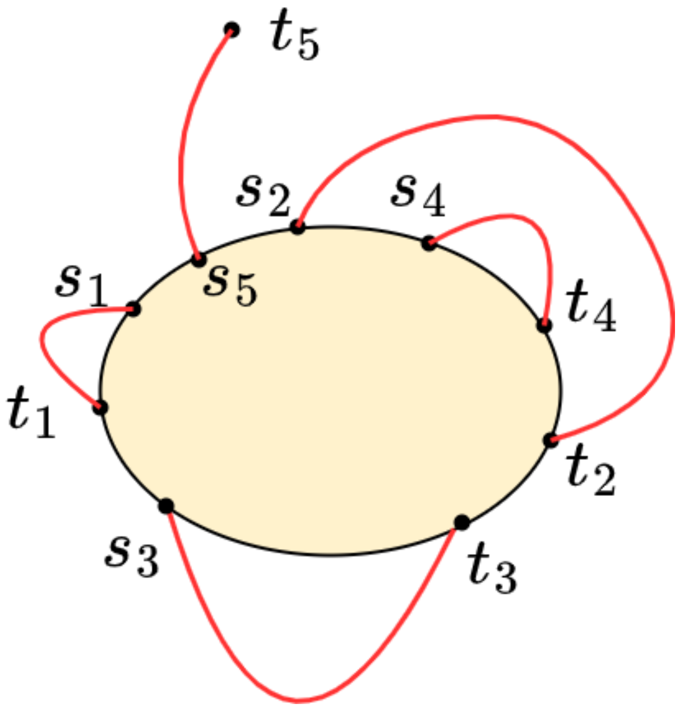
入力： 平面グラフ, 頂点対 $(s_1, t_1), \ldots, (s_k, t_k)$

一つのターミナルだけは共通の面上になくても良い

出力： 点素なパス $P_1, \ldots, P_k \, (P_i : s_i \to t_i)$

s.t. パスの合計の長さが最小





主結果

定理

頂点対数 k : 定数

除外ターミナルを含む同一面最短点素パス問題は**乱択多項式時間アルゴリズム**で解ける

意義

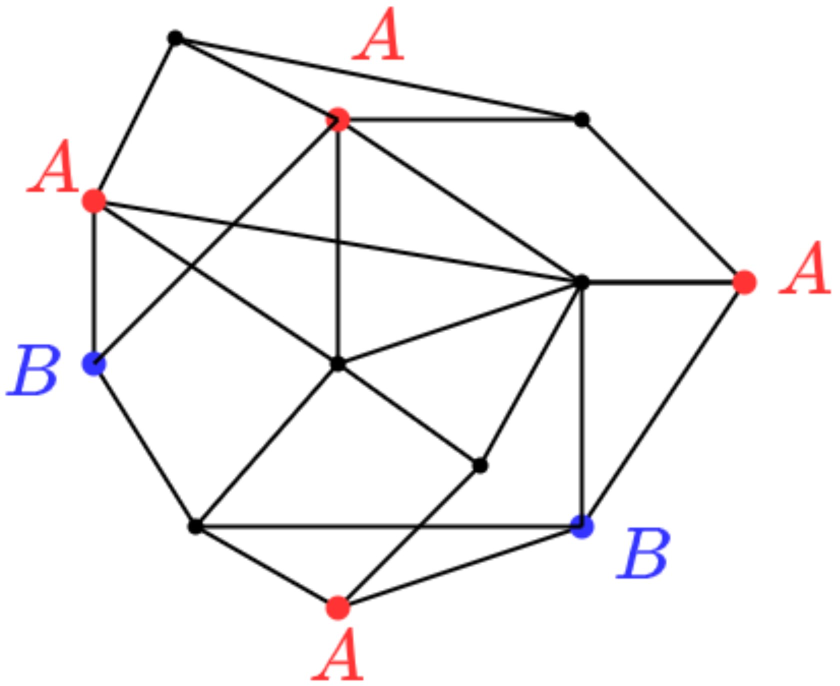
- Datta et al. 2018 の問題設定を拡張

手法

- 同一面最短点素パス問題［Datta et al. 2018]
- 最短点素 $(A+B)$-パス問題［Hirai & Namba 2018]
- $(A+B)$-パス ⟺ 頂点対のペアリングの対応
  （組合せ論的アイデア：カタラン数と関係）

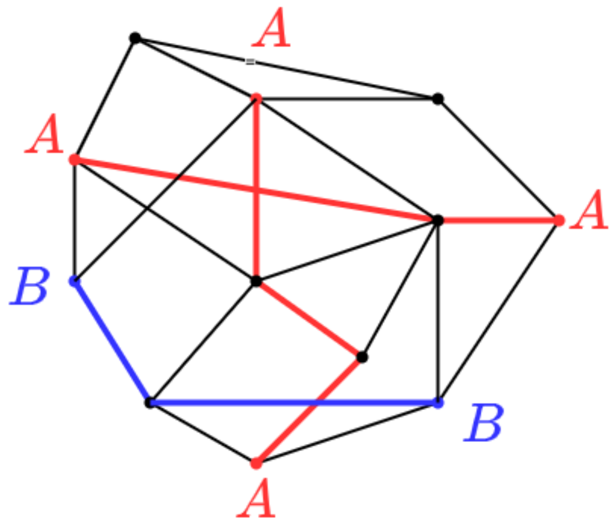
最短点素 $(A+B)$-パス問題 (Hirai & Namba 2018)

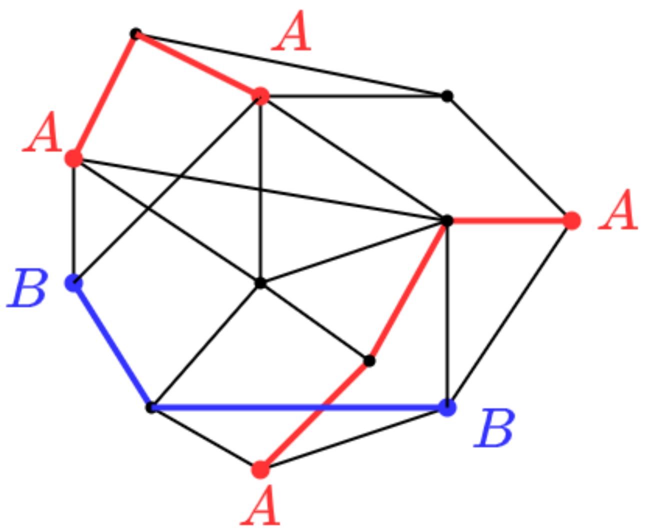
入力： 偶数サイズの**頂点集合** $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{V}$
出力： **点素な τ =|A|/2 + |B|/2 本のパス**
s.t. パスの合計の長さが最小
パスの端点は両方Aに属す or 両方Bに属す



最短点素 $(A+B)$-パス問題 (Hirai & Namba 2018)

入力： 偶数サイズの**頂点集合** $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{V}$
出力： **点素な τ =|A|/2 + |B|/2 本のパス**
s.t. パスの合計の長さが最小
パスの端点は両方Aに属す or 両方Bに属す

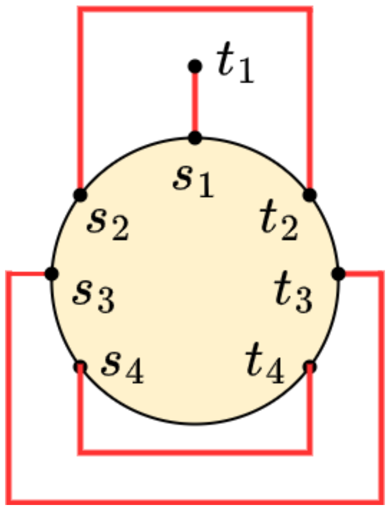




定理
全ての点素$(A+B)$-パスに対応する一つの多項式を多項式時間で計算できる

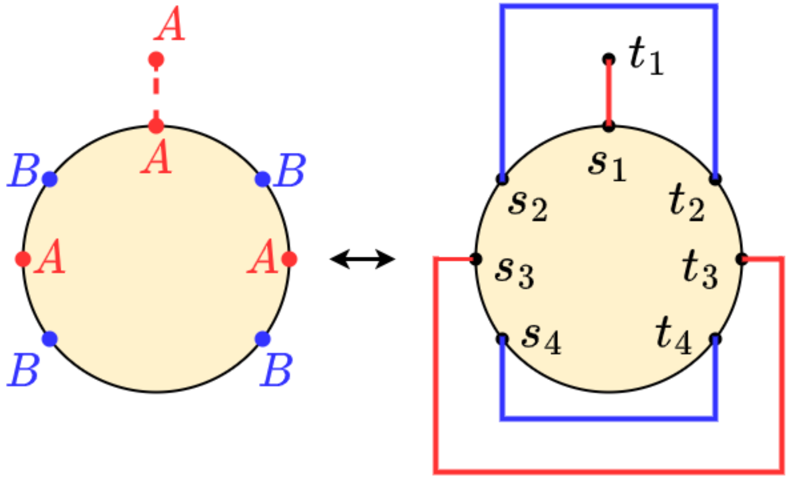
mod $2^{\tau+1}$の**ハフニアン**の利用

除外ターミナルを含む同一面最短点素パス問題に対するアルゴリズム

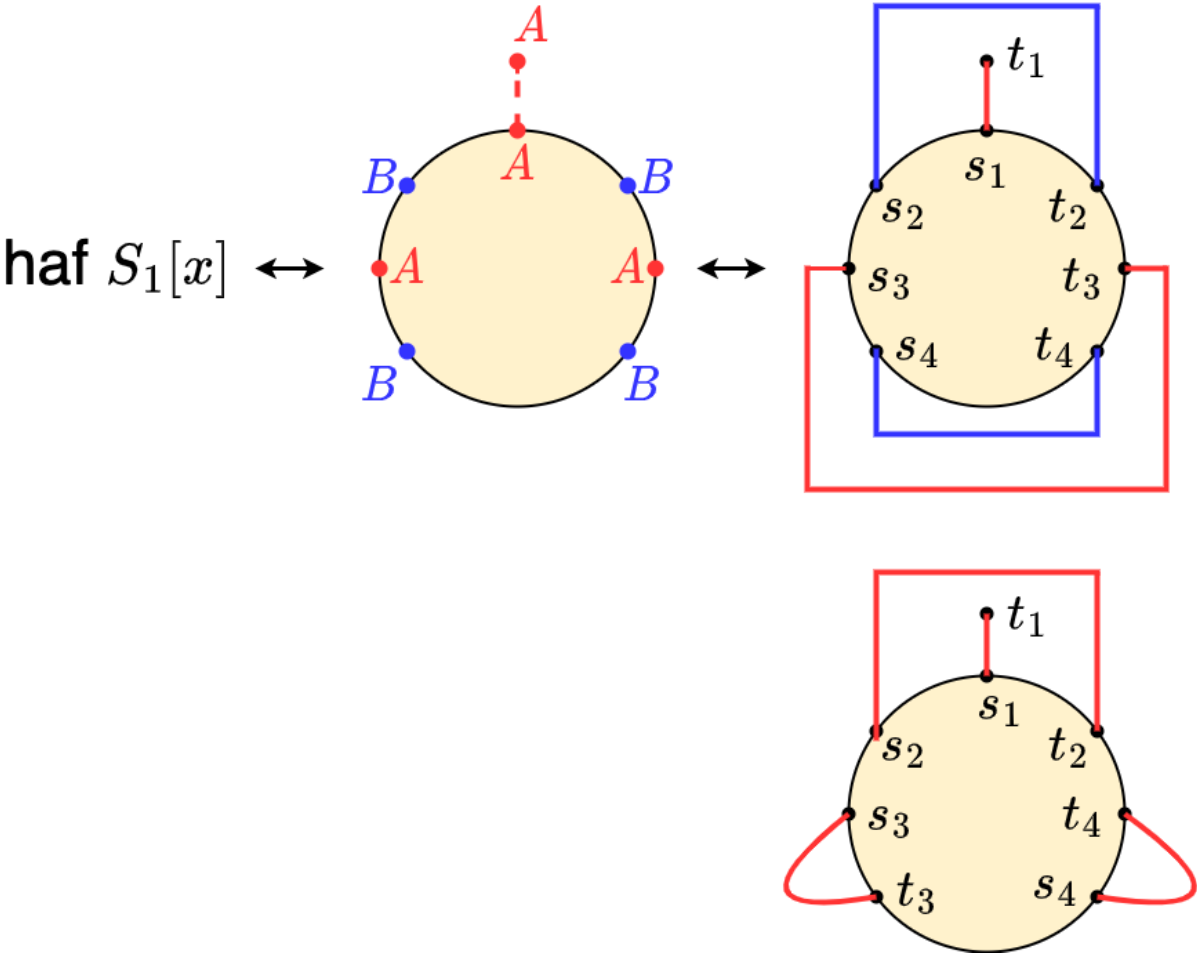


除外ターミナルを含む同一面最短点素パス問題に対するアルゴリズム

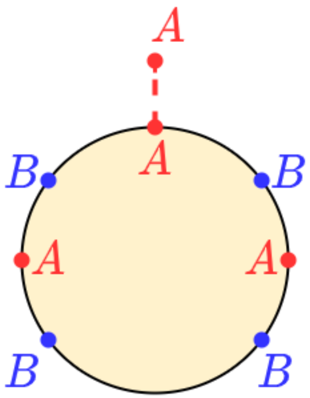
haf $S_1[x]$ $\leftrightarrow$

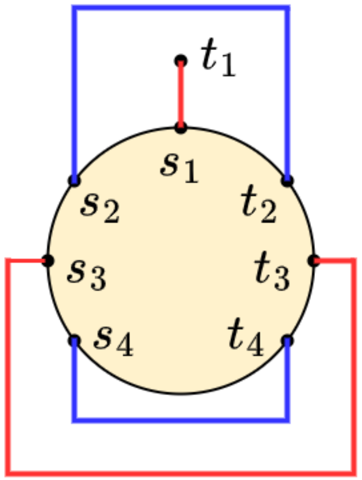


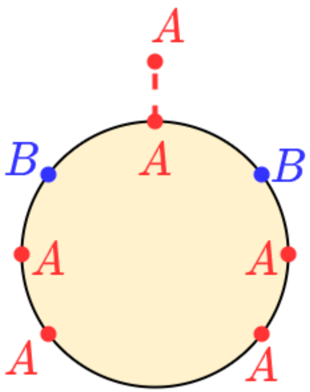
除外ターミナルを含む同一面最短点素パス問題に対するアルゴリズム

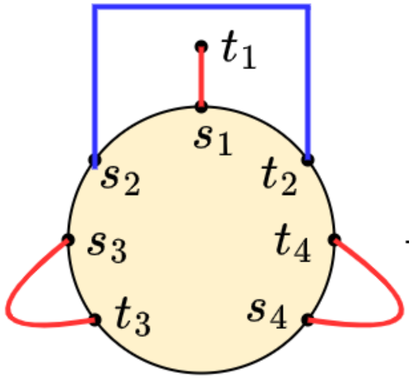


除外ターミナルを含む同一面最短点素パス問題に対するアルゴリズム

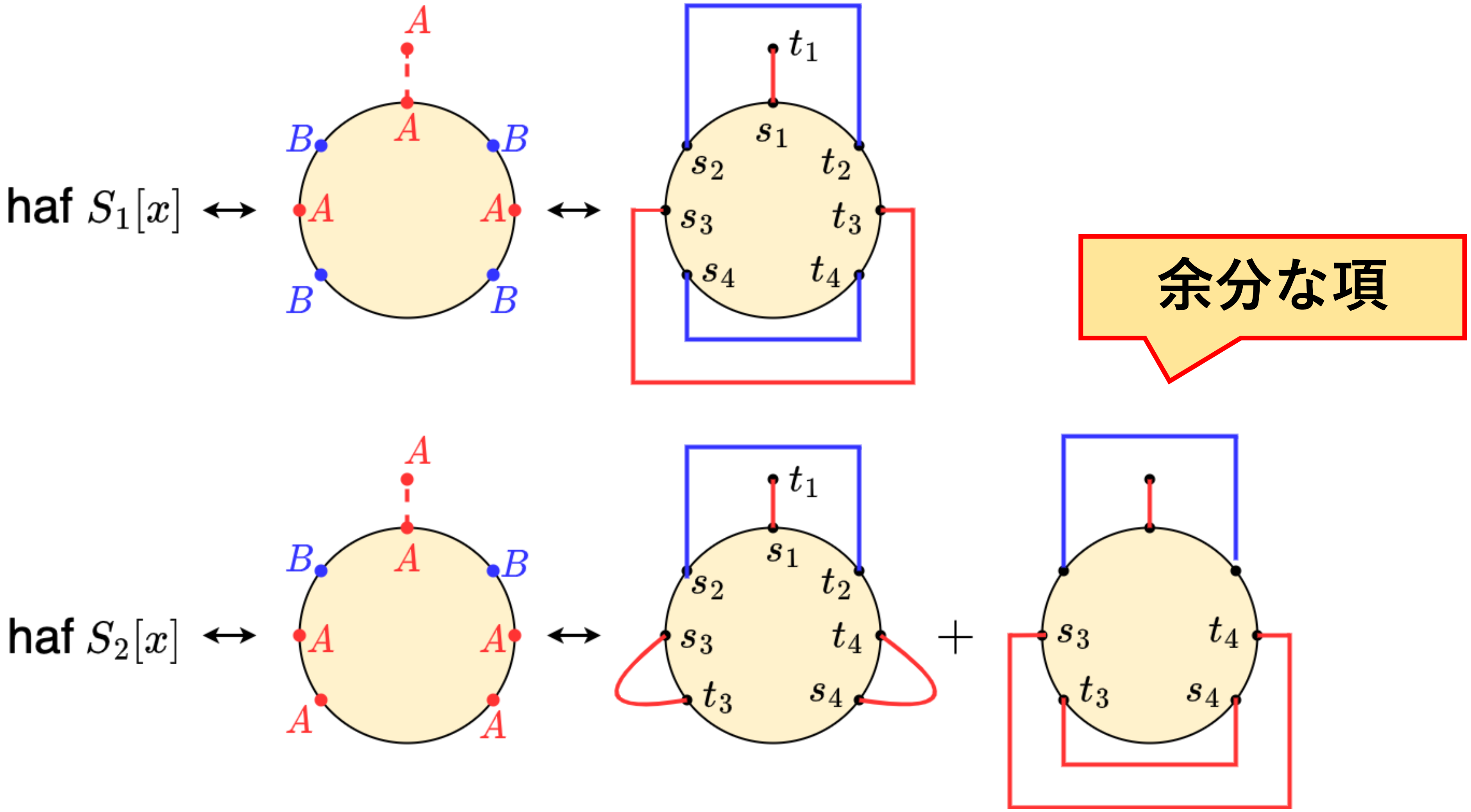
haf $S_1[x]$ $\leftrightarrow$ 

$\leftrightarrow$ 

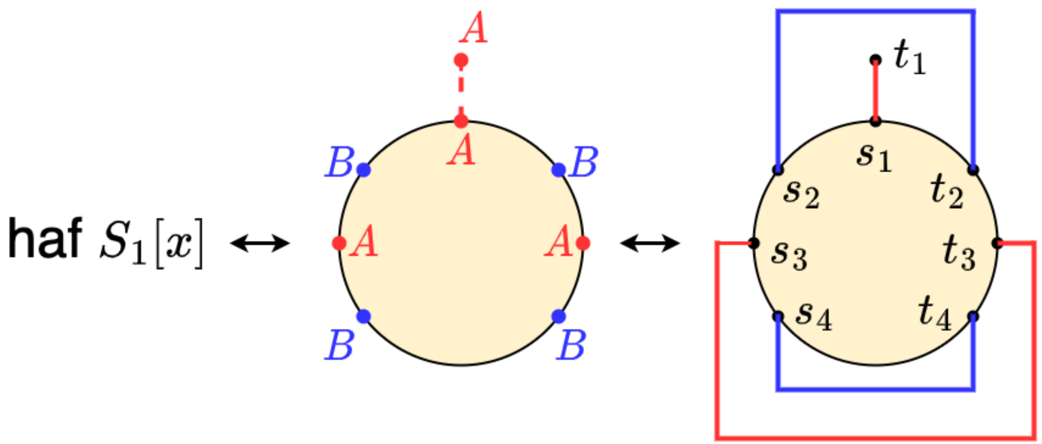
haf $S_2[x]$ $\leftrightarrow$ 

$\leftrightarrow$ 

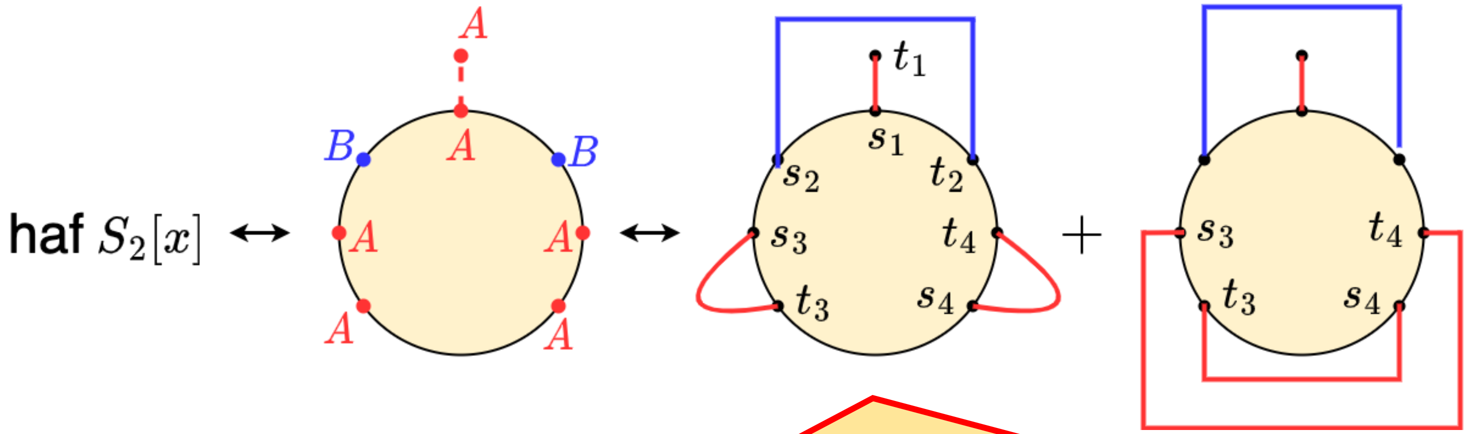
除外ターミナルを含む同一面最短点素パス問題に対するアルゴリズム



除外ターミナルを含む同一面最短点素パス問題に対するアルゴリズム

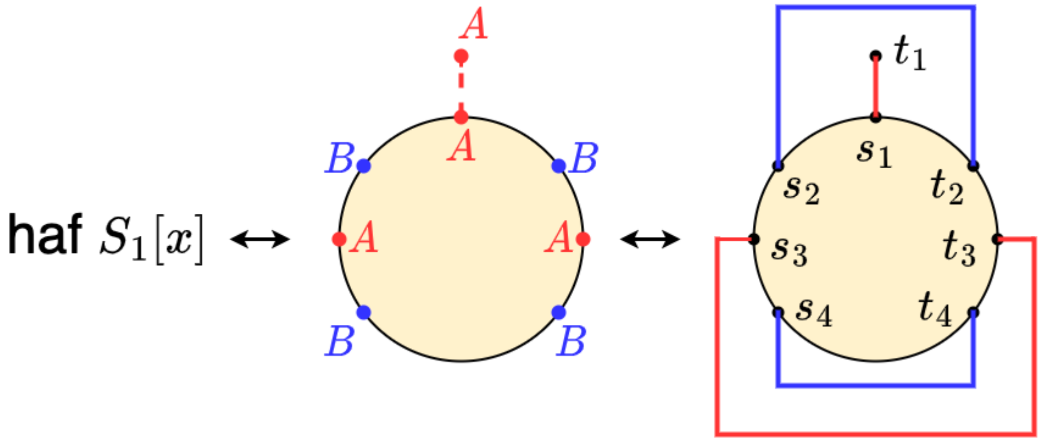


余分な項は haf S_1 に対応

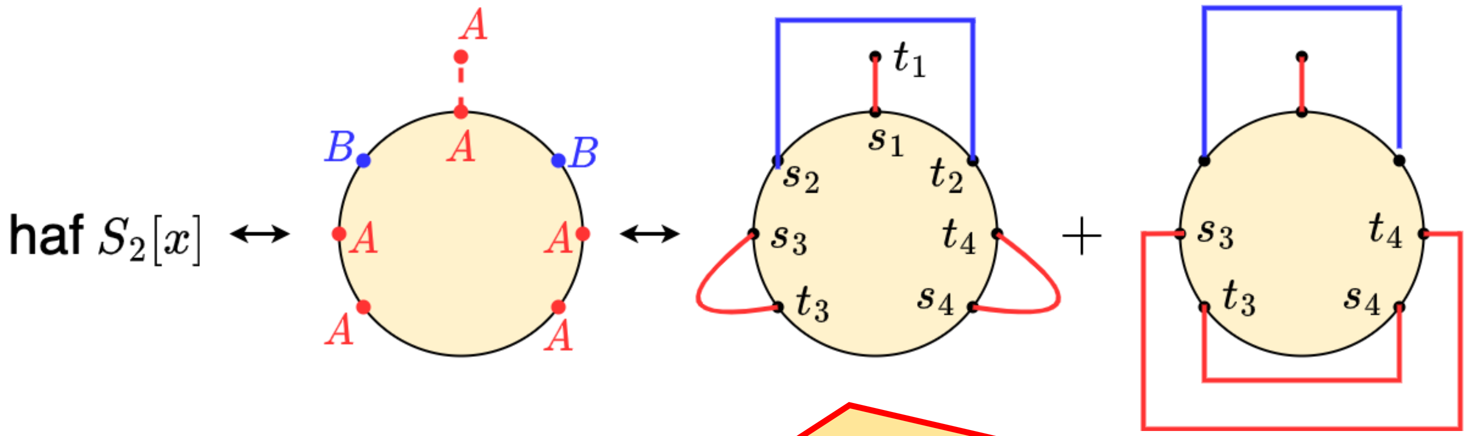


haf $S_2[x]$ − haf $S_1[x]$ の最小次数の項が最短点素パスに対応

除外ターミナルを含む同一面最短点素パス問題に対するアルゴリズム



余分な項は haf S_1 に対応

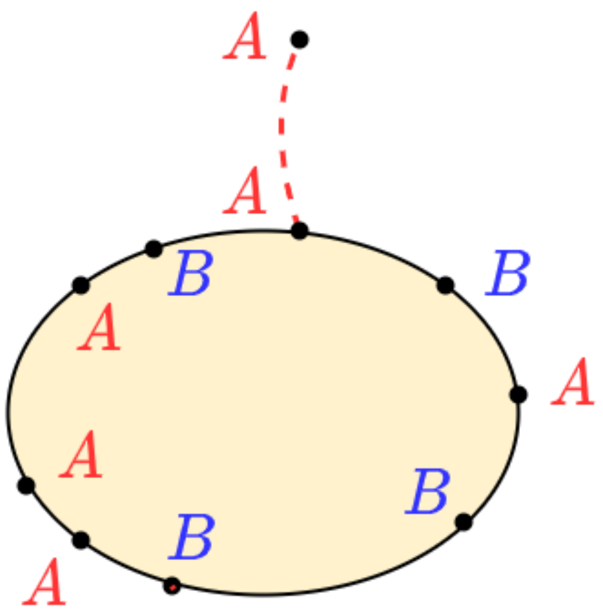


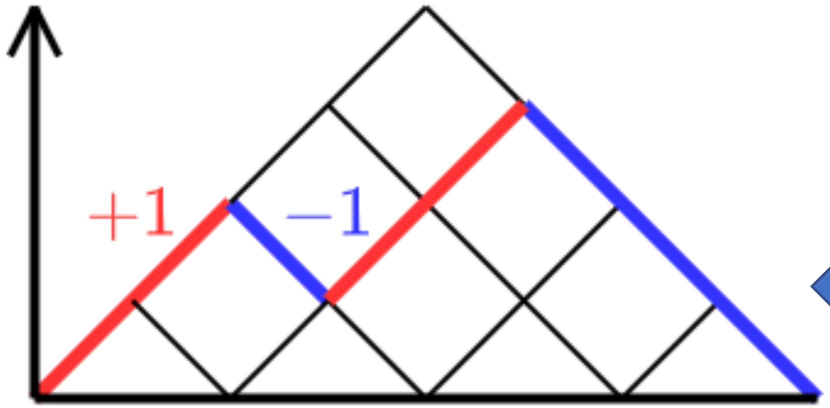
- mod 2^{k+1} のハフニアン
- 最適解が一意になるように摂動（乱択）

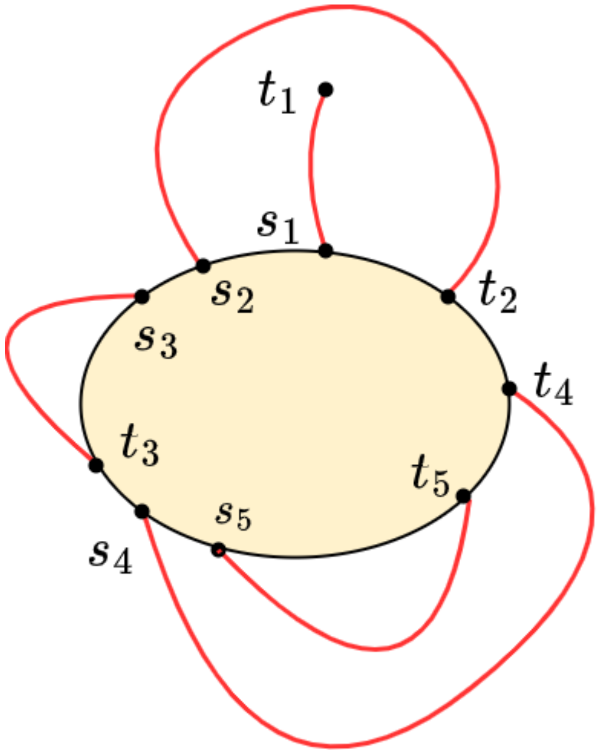
haf $S_2[x]$ − haf $S_1[x]$ の最小次数の項が最短点素パスに対応

(A, B)-分割と頂点対のペアリングの対応

デックパス



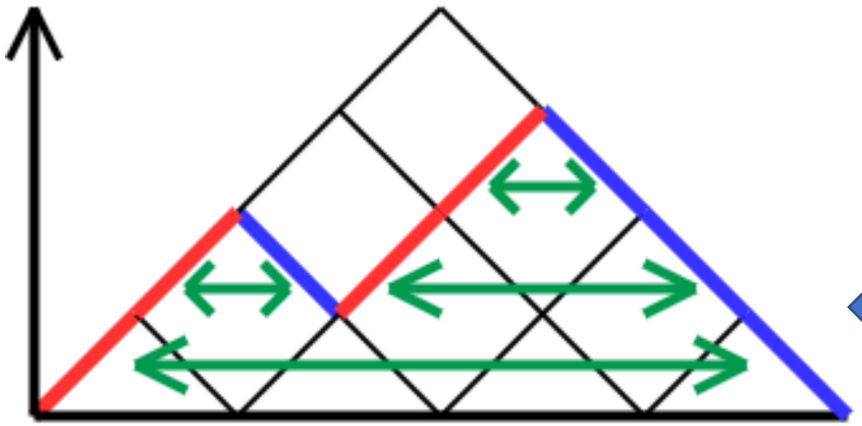




(+1, +1, -1, +1, +1, -1, -1, -1)

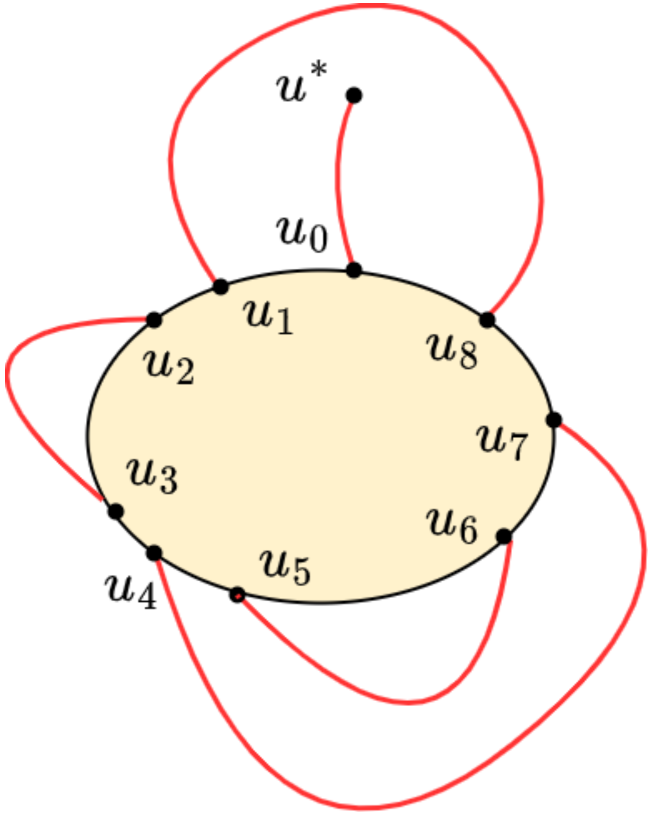
バロット列

(A, B)-分割と頂点対のペアリングの対応

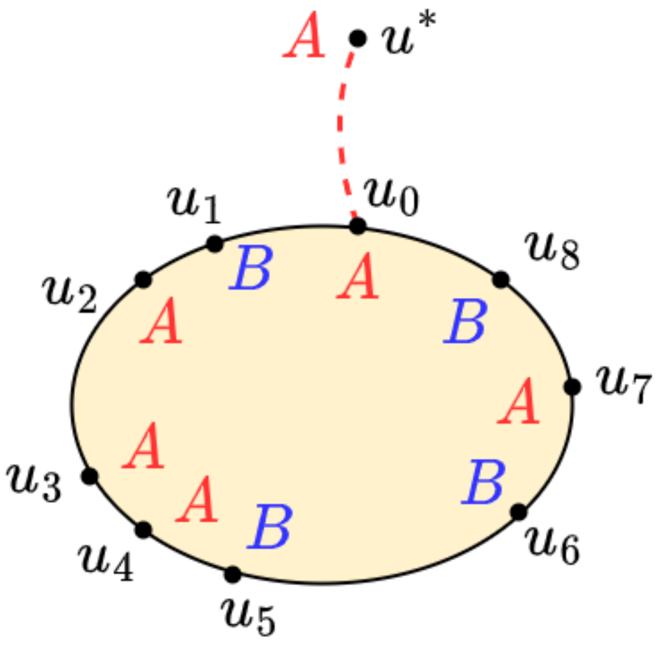


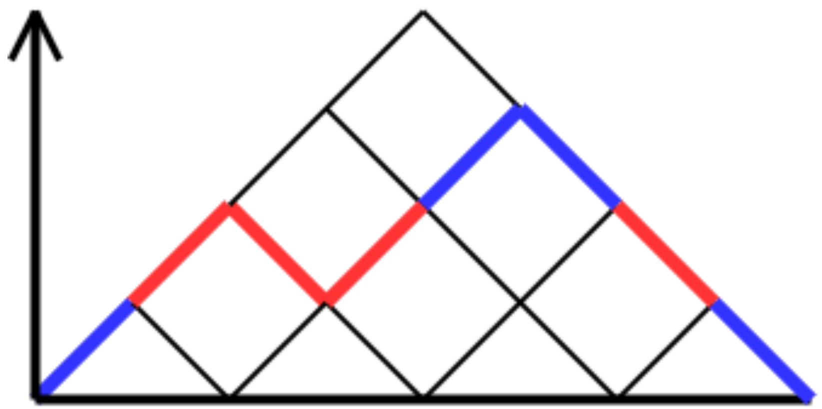
(+1, +1, -1, +1, +1, -1, -1, -1)

(( ) (( )))



(A, B)-分割と頂点対のペアリングの対応

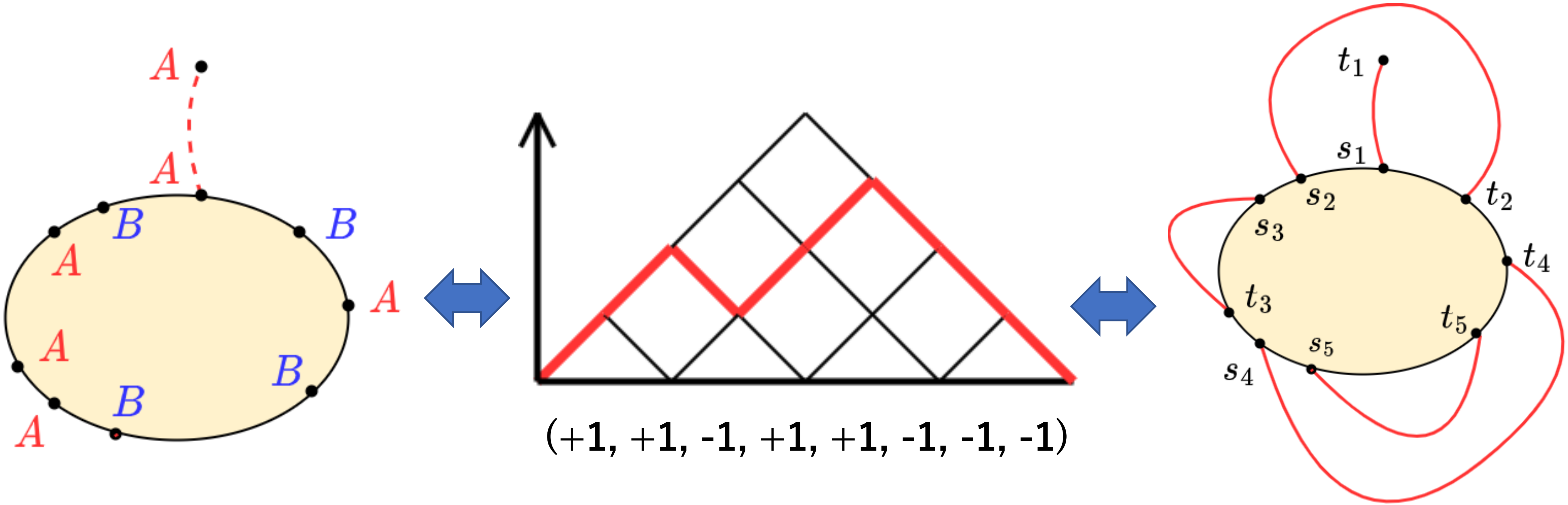




$\boldsymbol{f(i)}$ = (+1, +1, -1, +1, +1, -1, -1, -1)

$$\mathbf{u}_i \in \begin{cases} A & \textbf{if } (f(i) = +1 \textbf{ and } i \text{ が偶数}) \textbf{ or} \\ & (f(i) = -1 \textbf{ and } i \text{ が奇数}), \\ B & \textbf{otherwise.} \end{cases}$$

(A, B)-分割と頂点対のペアリングの対応



目次

- 先行研究
  - 点素パス問題
  - 最短点素パス問題
  - 同一面最短点素パス問題
- 本研究 : 除外ターミナルを含む同一面最短点素パス問題
- アイデア
  - $(A+B)$-パスと頂点対のペアリングの対応
- 結論

結論

- **除外ターミナルを含む同一面最短点素パス問題**の提案
- **乱択多項式時間アルゴリズム**を得た

  - **最短点素(A + B)-パス**と**同一面最短点素パス**の組合せ
  - **(A + B)-パスと頂点対のペアリングの対応**という**組合せ論的**発想

Q. 決定的多項式時間アルゴリズム
Q. 同一面以外にあるターミナルが2つ以上の場合
Q. ターミナルが2面に任意の順でのっている場合