マトロイド分割問題に対する高速なアルゴリズム

寺尾 樹哉

京都大学数理解析研究所

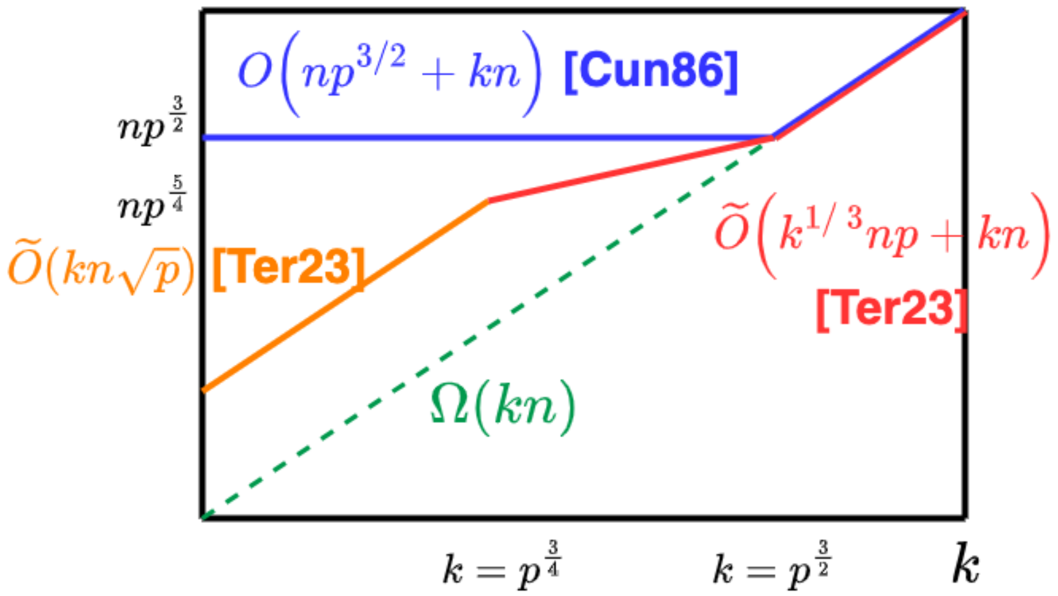
最適化の理論とアルゴリズム:未来を担う若手研究者の集い 2023@筑波大学
5月20日(土)

発表概要

主結果

マトロイド分割問題を高速に解く3つのアルゴリズムを設計

- アルゴリズム①
  独立性オラクル $\tilde{O}(kn\sqrt{p})$回クエリ
- アルゴリズム②
  独立性オラクル $\tilde{O}(k^{1/3}np + kn)$回クエリ
- アルゴリズム③
  ランクオラクル $\tilde{O}((n+k)\sqrt{p})$回クエリ



Tatsuya Terao : **Faster Matroid Partition Algorithms,** Proceedings of the 50th EATCS International Colloquium on Automata, Languages and Programming (**ICALP 2023**), to appear (arXiv: 2303.05920)

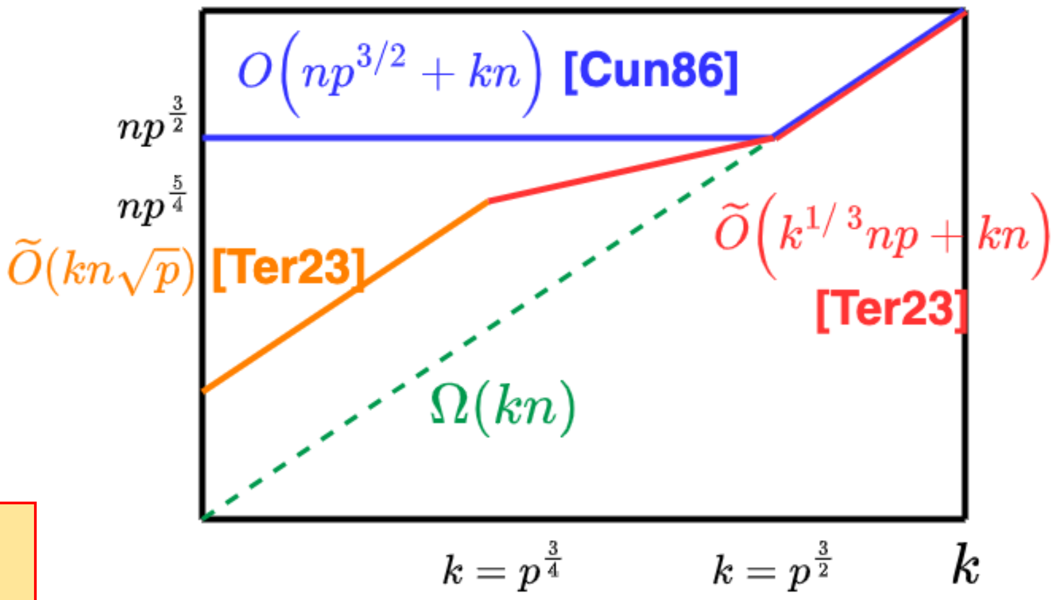
発表概要

主結果
マトロイド分割問題を高速に

[Cunningham,1986]から約40年ぶり

- アルゴリズム①
  独立性オラクル $\tilde{O}(kn\sqrt{p})$回クエリ
- アルゴリズム②
  独立性オラクル $\tilde{O}(k^{1/3}np + kn)$回クエリ
- アルゴリズム③
  ランクオ

辺再利用型増加路探索



<u>Tatsuya Terao</u>：**Faster Matroid Partition Algorithms,** Proceedings of the 50th EATCS International Colloquium on Automata, Languages and Programming (**ICALP 2023**), to appear (arXiv: 2303.05920)

目次

- **発表概要**
- **準備**
  - マトロイド
  - マトロイド交叉問題
  - マトロイド分割問題
- **主結果**
  - マトロイド分割問題に対する高速なアルゴリズム
- **アイデア**
  - ブロッキングフロー
  - 辺再利用型増加路探索
- **結論**

マトロイド $\mathcal{M} = (V, \mathcal{I})$: 線形独立性の一般化

$\mathcal{I}$の要素を**独立**集合と呼ぶ

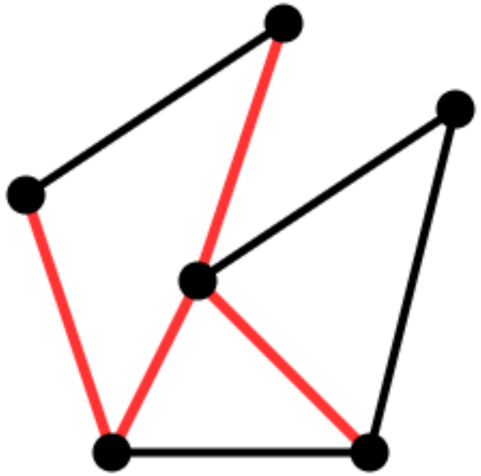
<u>定義</u>

有限集合 V 上の空でない部分集合族 $\mathcal{I} \subseteq 2^V$ で次のよい性質を持つもの

- $S' \subseteq S \in \mathcal{I} \implies S' \in \mathcal{I}$
- $S, T \in \mathcal{I}, |S| > |T| \implies \exists\, e \in S - T$ s.t. $T \cup \{e\} \in \mathcal{I}$

例）

- **グラフ的マトロイド**



V ＝辺集合
$\mathcal{I}$ ＝森全体

- **線形マトロイド**

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

V ＝行ベクトル
$\mathcal{I}$ ＝線形独立

マトロイド $\mathcal{M} = (V, \mathcal{I})$

$\mathcal{I}$の要素を**独立**集合と呼ぶ

有限集合 V 上の部分集合族 $\mathcal{I}$ で良い性質を持つもの

マトロイド $\mathcal{M} = (V, \mathcal{I})$

$\mathcal{I}$の要素を独立集合と呼ぶ

有限集合 V 上の部分集合族 $\mathcal{I}$ で良い性質を持つもの

Q. マトロイドをどう扱うのか？

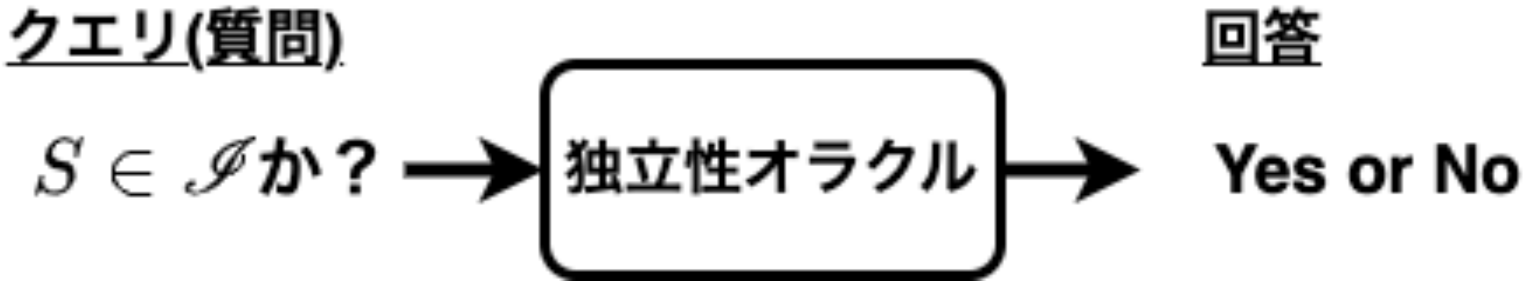
マトロイド $\mathcal{M} = (V, \mathcal{I})$

$\mathcal{I}$の要素を独立集合と呼ぶ

有限集合 V 上の部分集合族 $\mathcal{I}$ で良い性質を持つもの

Q. マトロイドをどう扱うのか？

独立性オラクル

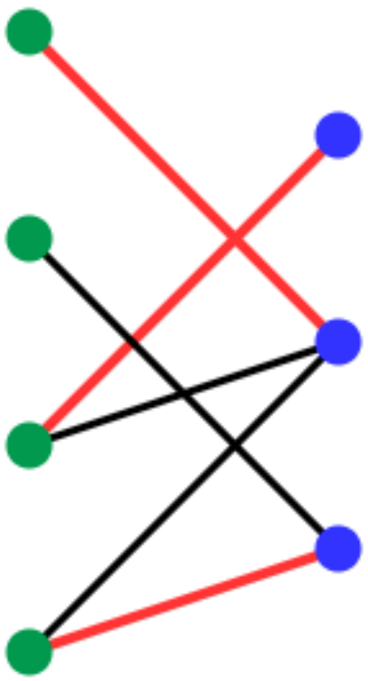


マトロイド交叉問題

入力：2つのマトロイド $\mathcal{M}_1 = (V, \mathcal{I}_1), \mathcal{M}_2 = (V, \mathcal{I}_2)$
出力：最大サイズの**共通独立集合** $S \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$

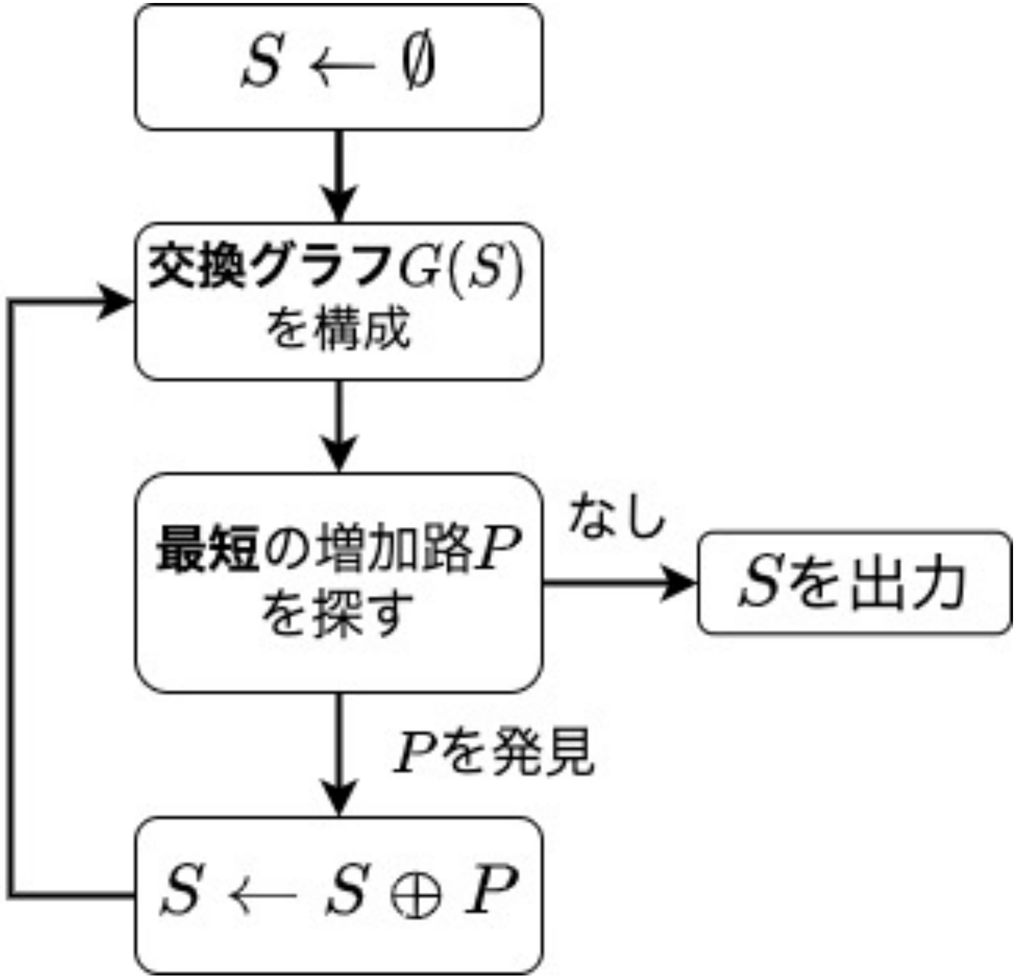
例） 二部グラフの最大マッチング

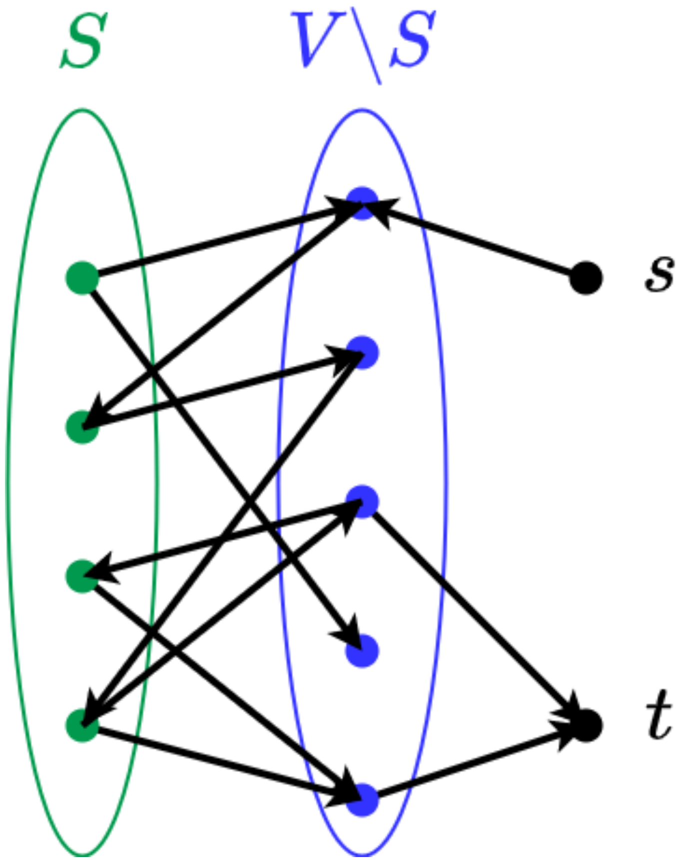
- $\boldsymbol{\mathcal{I}_1}$ = **左側の各頂点から辺を高々1本**
- $\boldsymbol{\mathcal{I}_2}$ = **右側の各頂点から辺を高々1本**



マトロイド交叉問題に対するアルゴリズム

(Edmonds 1970, Aigner-Dowling 1971, Lawler 1975)

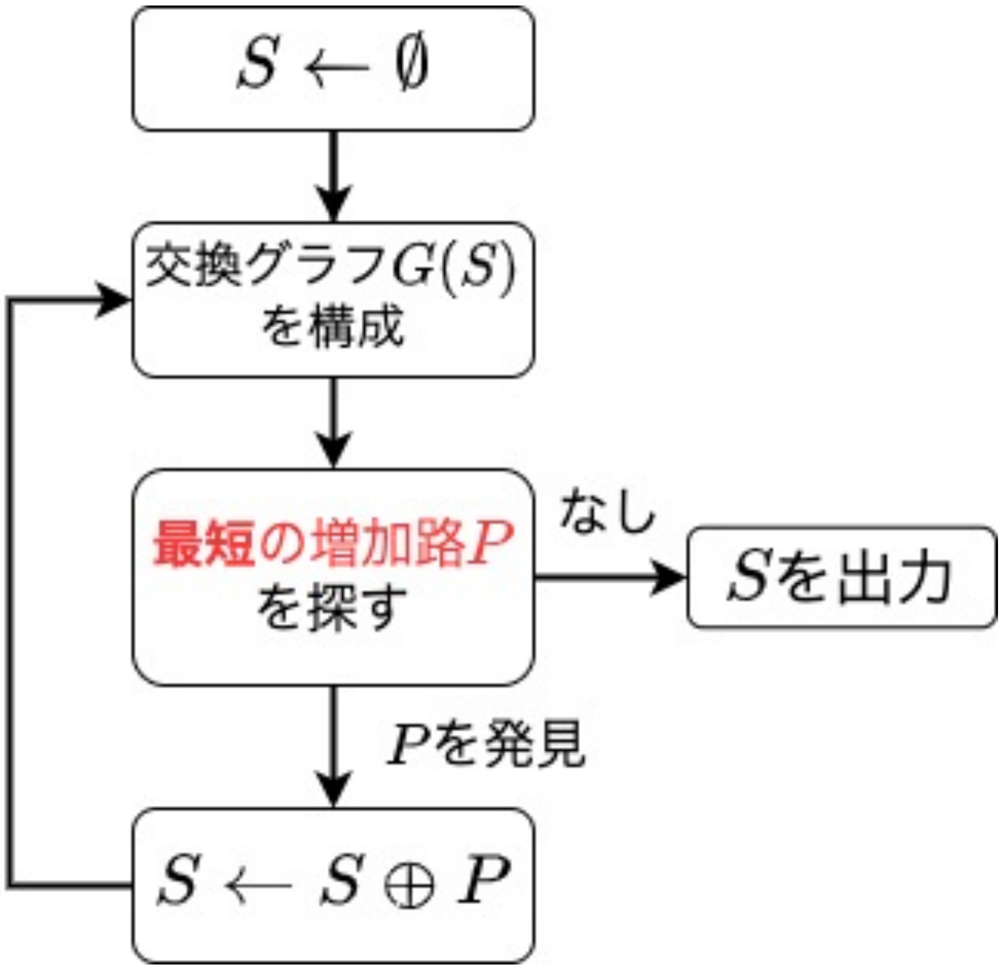


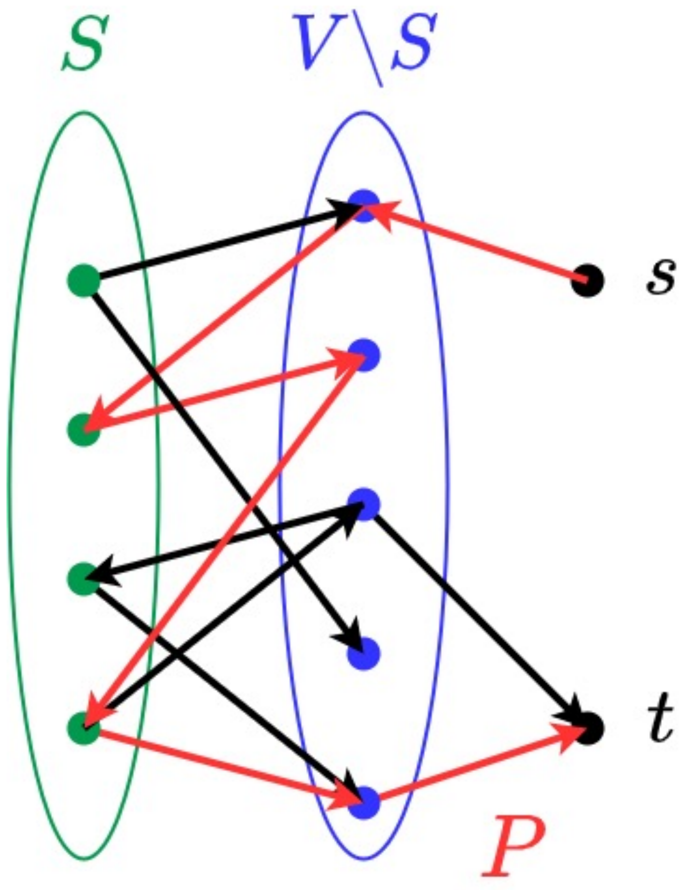


交換グラフ $G(S)$

マトロイド交叉問題に対するアルゴリズム

(Edmonds 1970, Aigner-Dowling 1971, Lawler 1975)





交換グラフ $G(S)$

マトロイド交叉問題の高速化

独立性オラクルのクエリ回数

1970s	Edmonds, Lawler, Aigner-Dowling	$O(nr^2)$
1986	Cunningham	$O(nr^{3/2})$
2015	Lee-Sidford-Wong	$\tilde{O}(n^2)$
2019	Nguyễn, Chakrabarty-Lee-Sidford-Singla-Wong	$\tilde{O}(nr)$
2021	Blikstad-v.d.Brand-Mukhopadhyay-Nanongkai	$\tilde{O}(n^{9/5})$
2021	Blikstad	$\tilde{O}(nr^{3/4})$

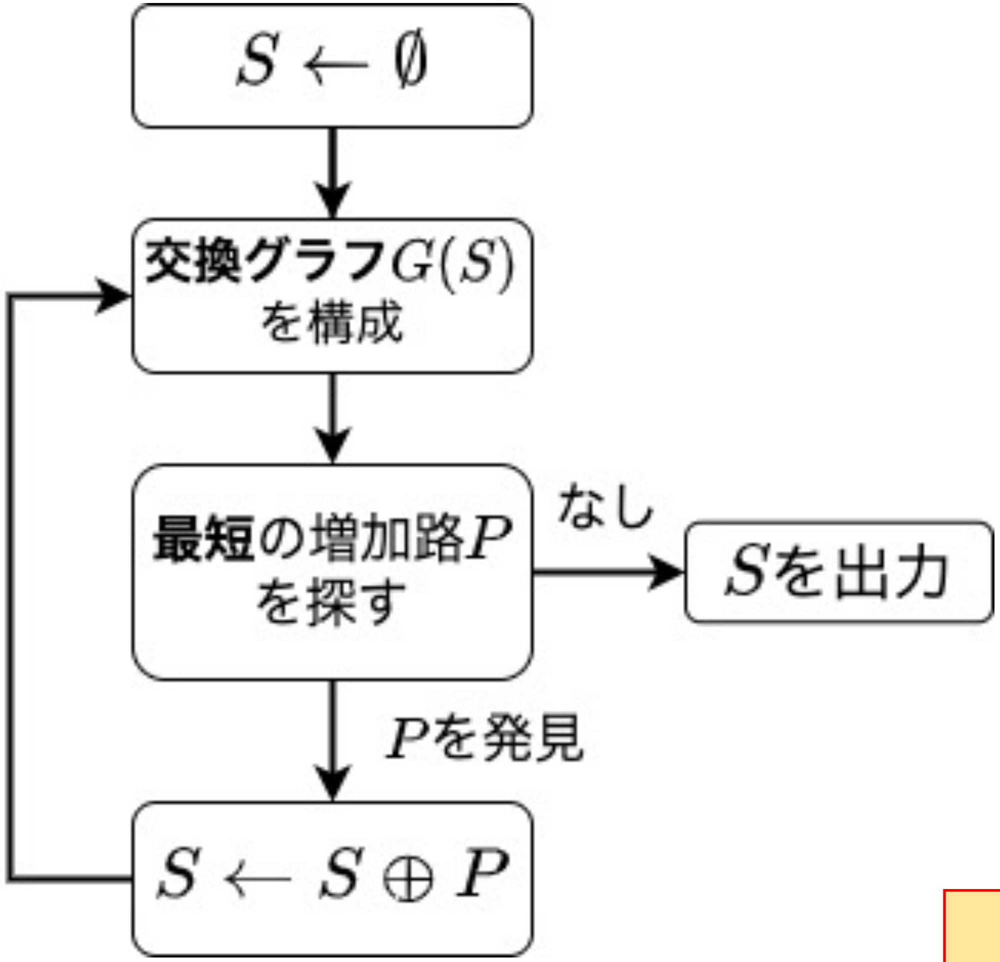
2.5乗の壁

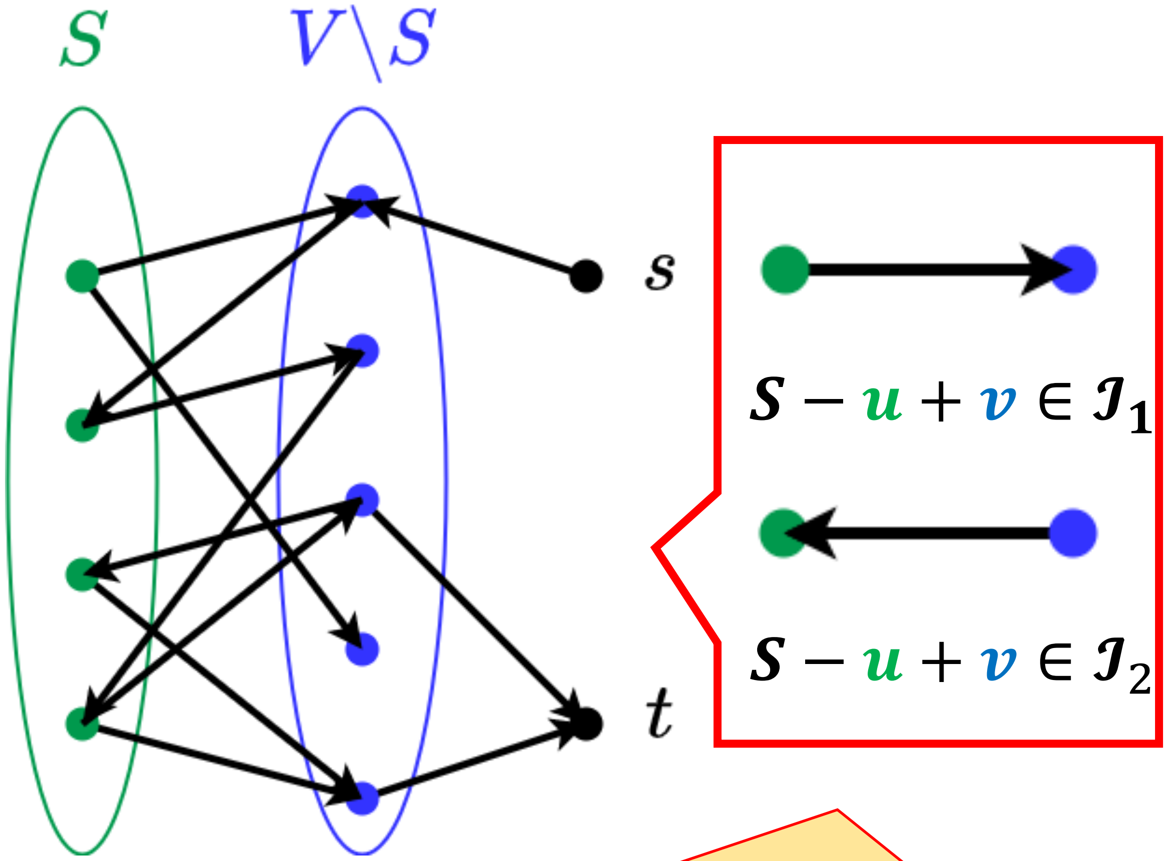
2乗の壁

$n = |V|$, 解のサイズ $\boldsymbol{r}(\leq \boldsymbol{n})$

マトロイド交叉問題に対するアルゴリズム

(Edmonds 1970, Aigner-Dowling 1971, Lawler 1975)

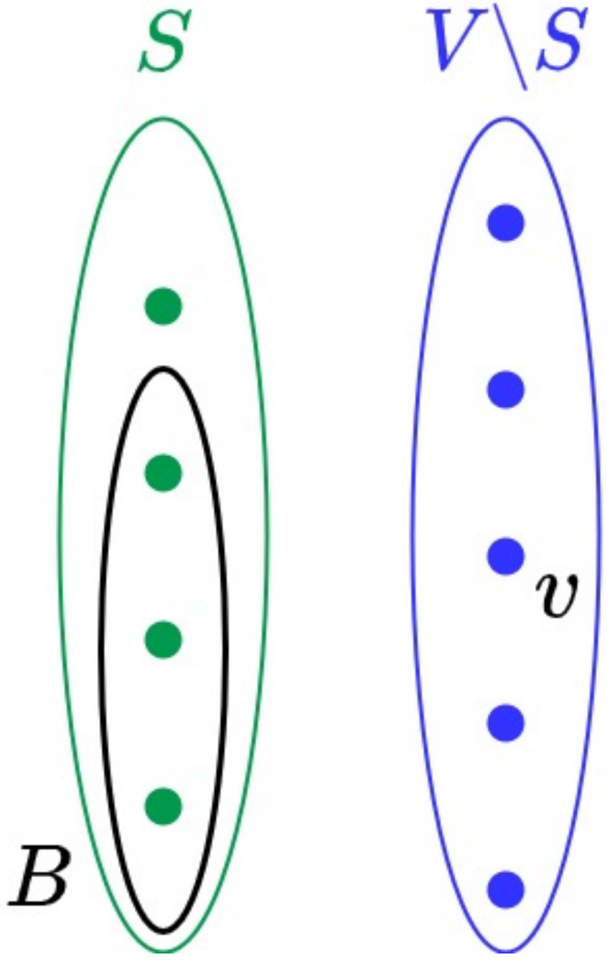




交換グラフ $G(S)$ の辺を全て見る！

マトロイド交叉の高速化の道具

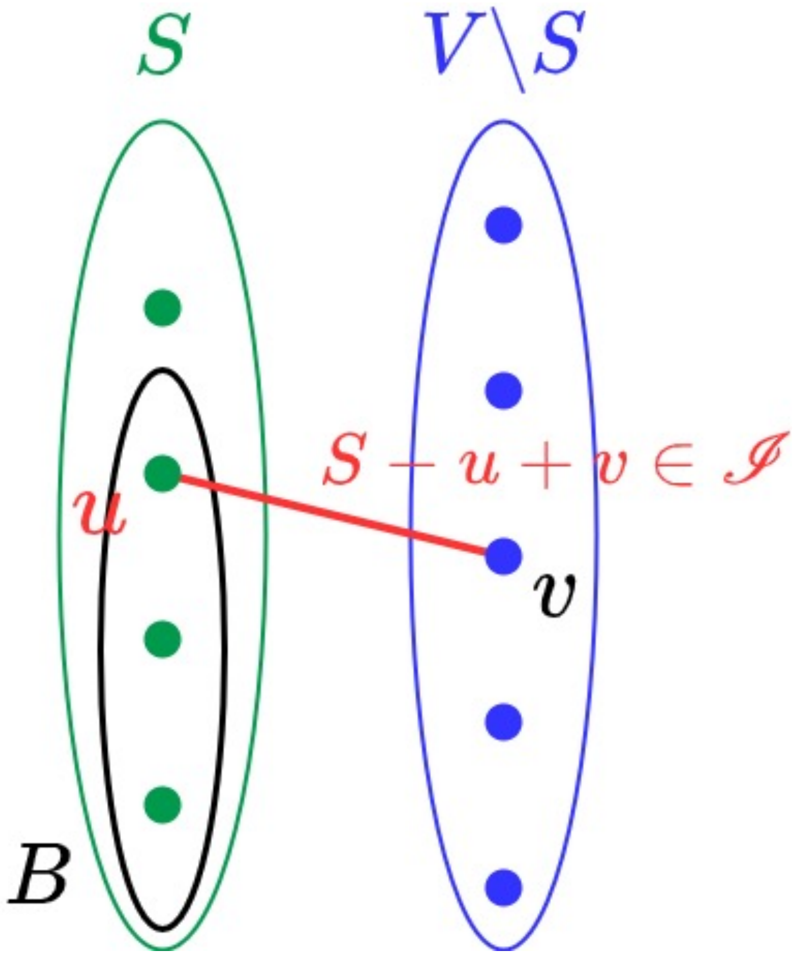
(Nguyễn 2019, Chakrabarty et al. 2019)



入力：$\mathcal{M} = (V, \mathcal{I})$, $S \in \mathcal{I}$, $v \in V \setminus S$, $B \subseteq S$

マトロイド交叉の高速化の道具

(Nguyễn 2019, Chakrabarty et al. 2019)

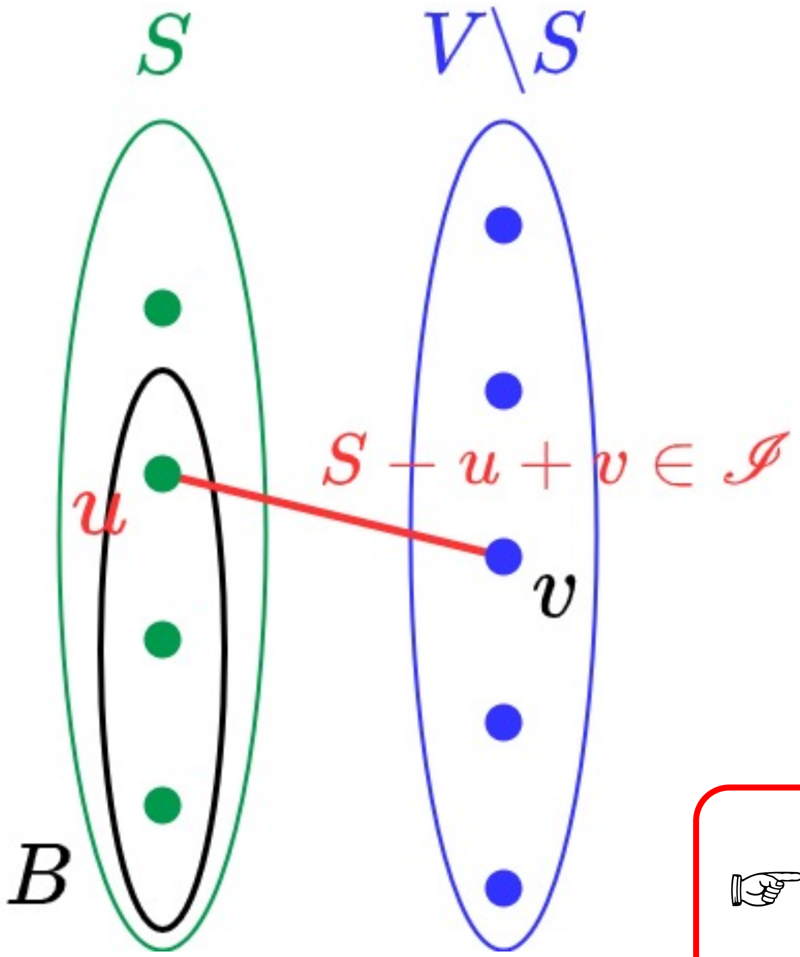


入力：$\mathcal{M} = (V, \mathcal{I})$, $S \in \mathcal{I}$, $v \in V \setminus S$, $B \subseteq S$
出力：$S - u + v \in \mathcal{I}$ なる $u \in B$ を一つ

二分探索を用いることで、
$O(\log |B|)$ **回**の独立性オラクルの使用でできる

マトロイド交叉の高速化の道具

(Nguyễn 2019, Chakrabarty et al. 2019)



入力：$\mathcal{M} = (V, \mathcal{I})$, $S \in \mathcal{I}$, $v \in V \setminus S$, $B \subseteq S$
出力：$S - u + v \in \mathcal{I}$ なる $u \in B$ を一つ

二分探索を用いることで、
$O(\log |B|)$ 回の独立性オラクル
の使用でできる

☞ **交換グラフ$G(S)$ の辺を全て見る必要はない！**

マトロイド分割問題

入力：**k 個のマトロイド** $\mathcal{M}_1 = (V, \mathcal{I}_1), \dots, \mathcal{M}_k = (V, \mathcal{I}_k)$
出力：**分割可能**な最大サイズの集合 $S \subseteq V$

$\boldsymbol{S_i} \in \boldsymbol{\mathcal{I}_i}$なる$\boldsymbol{S}$**の分割**$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S_1} \cup \cdots \cup \boldsymbol{S_k}$が存在

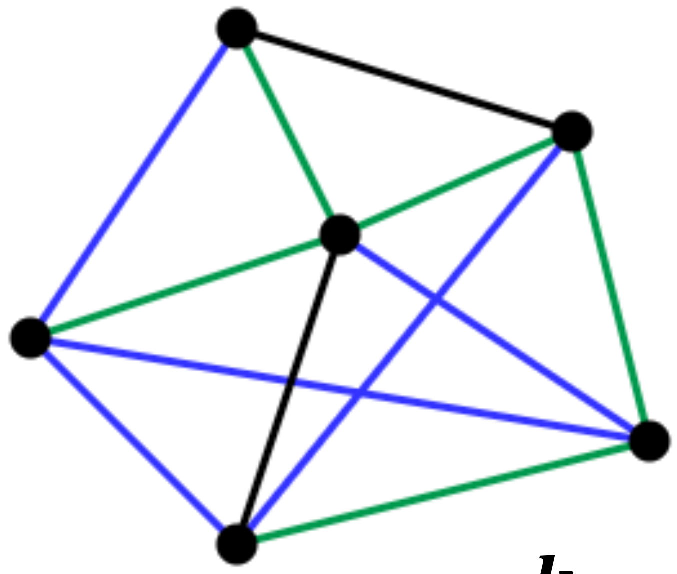
マトロイド分割問題

入力：**k 個のマトロイド** $\mathcal{M}_1 = (V, \mathcal{I}_1), \dots, \mathcal{M}_k = (V, \mathcal{I}_k)$
出力：**分割可能**な最大サイズの集合 $S \subseteq V$

$S_i \in \mathcal{I}_i$ なる S の分割 $S = S_1 \cup \cdots \cup S_k$ が存在

例） k-全域森問題

互いに辺素な森 k 個に**分割できる**
最大サイズの辺集合



$\boldsymbol{k = 2}$

マトロイド分割とマトロイド交叉

マトロイド分割問題は**マトロイド交叉問題に帰着**して解ける

☞ $\boldsymbol{V} \times \{\boldsymbol{1}, \dots, \boldsymbol{k}\}$ 上の**直和マトロイド**と**分割マトロイド**の交叉で解ける

マトロイド分割とマトロイド交叉

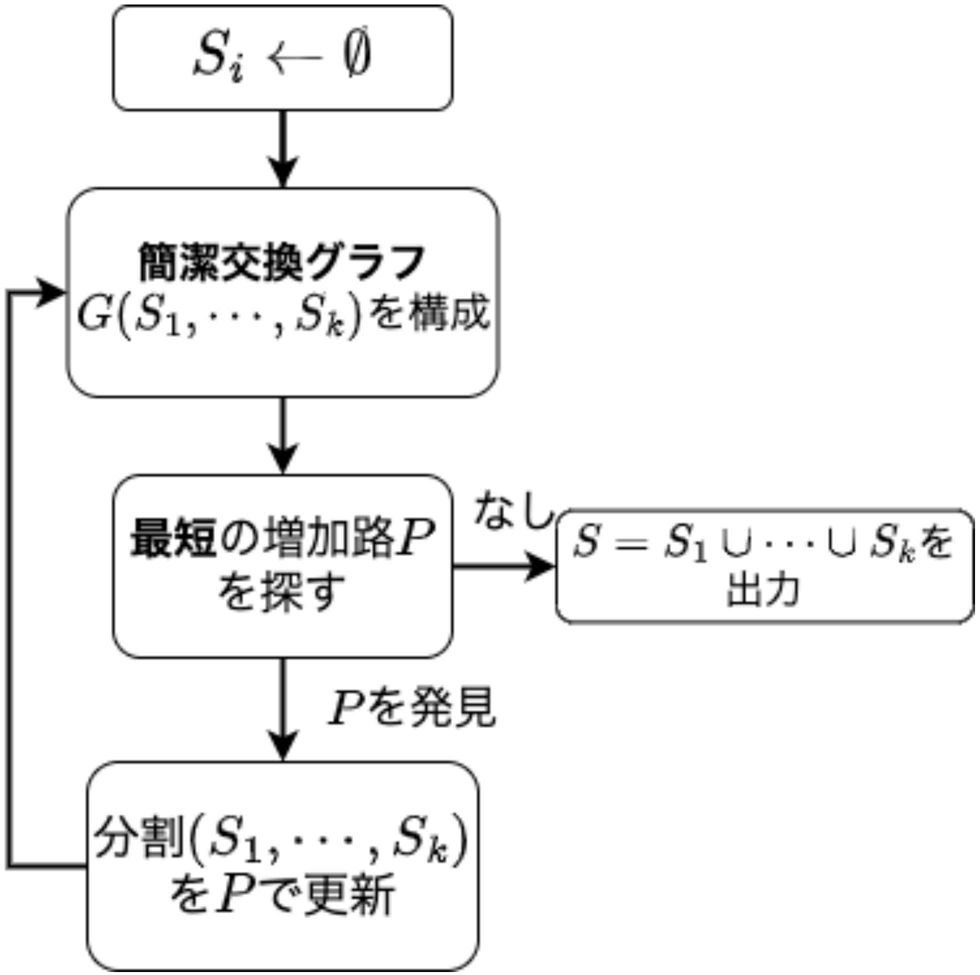
マトロイド分割問題は**マトロイド交叉問題に帰着**して解ける

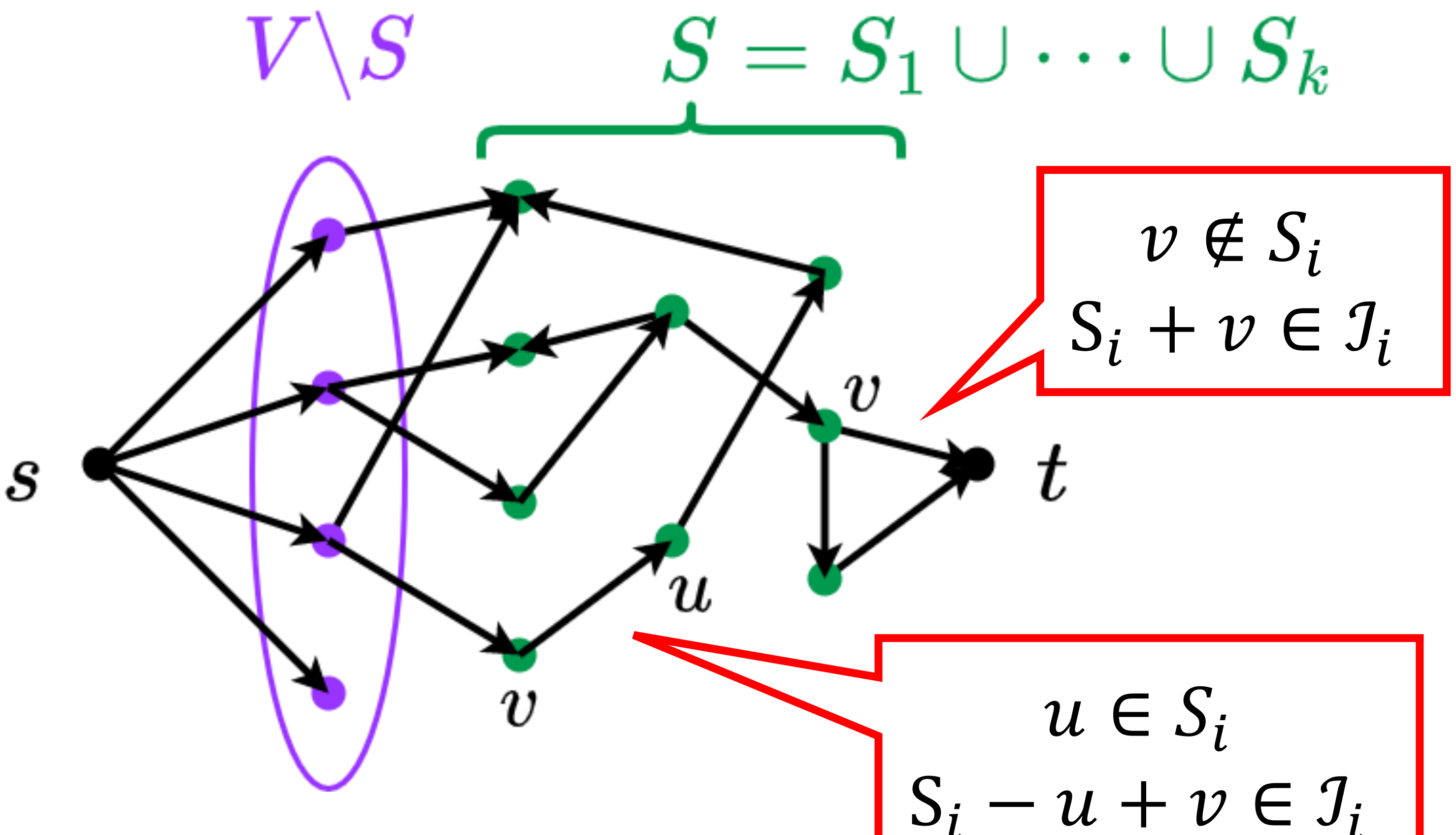
☞ $\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{\{1, \dots, k\}}$ 上の**直和マトロイド**と**分割マトロイド**の交叉で解ける

$\boldsymbol{k^2} \times$ (マトロイド交叉の計算量)と計算量が大きくなってしまう

マトロイド分割問題に対するアルゴリズム

(Edmonds 1968)

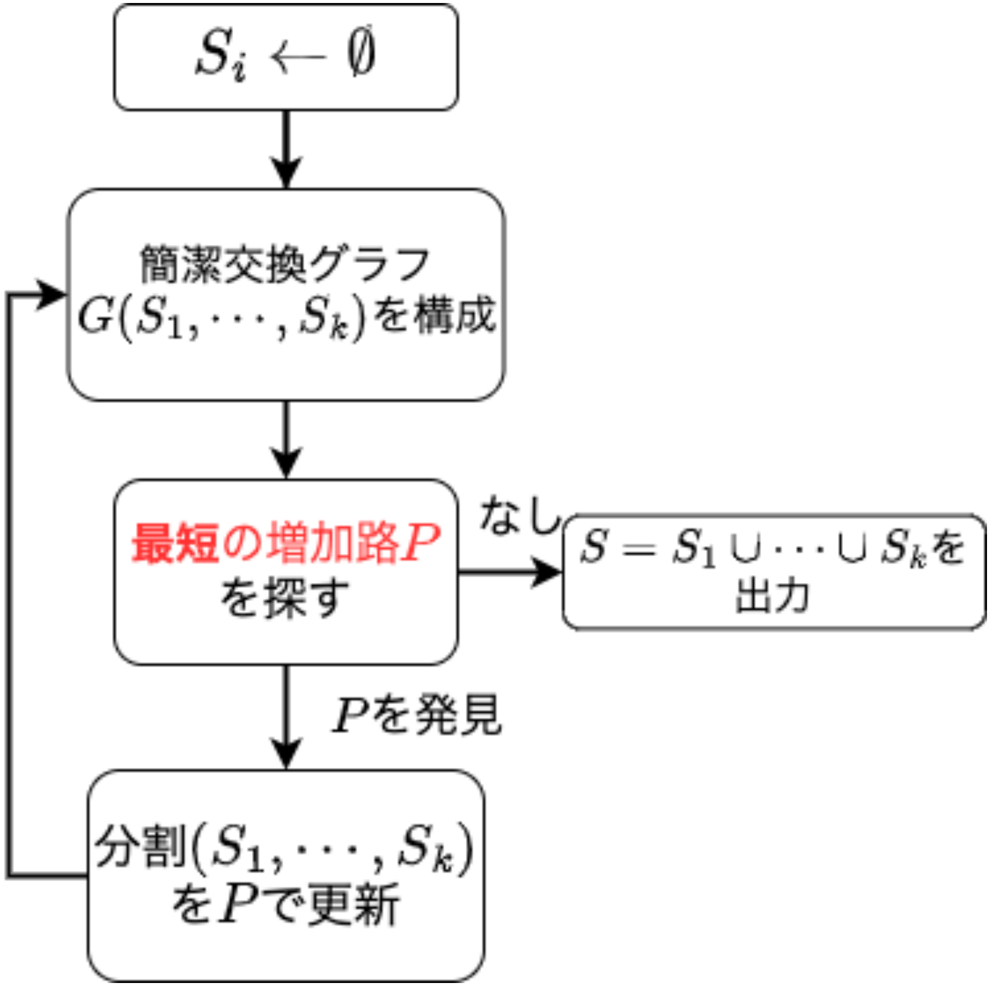


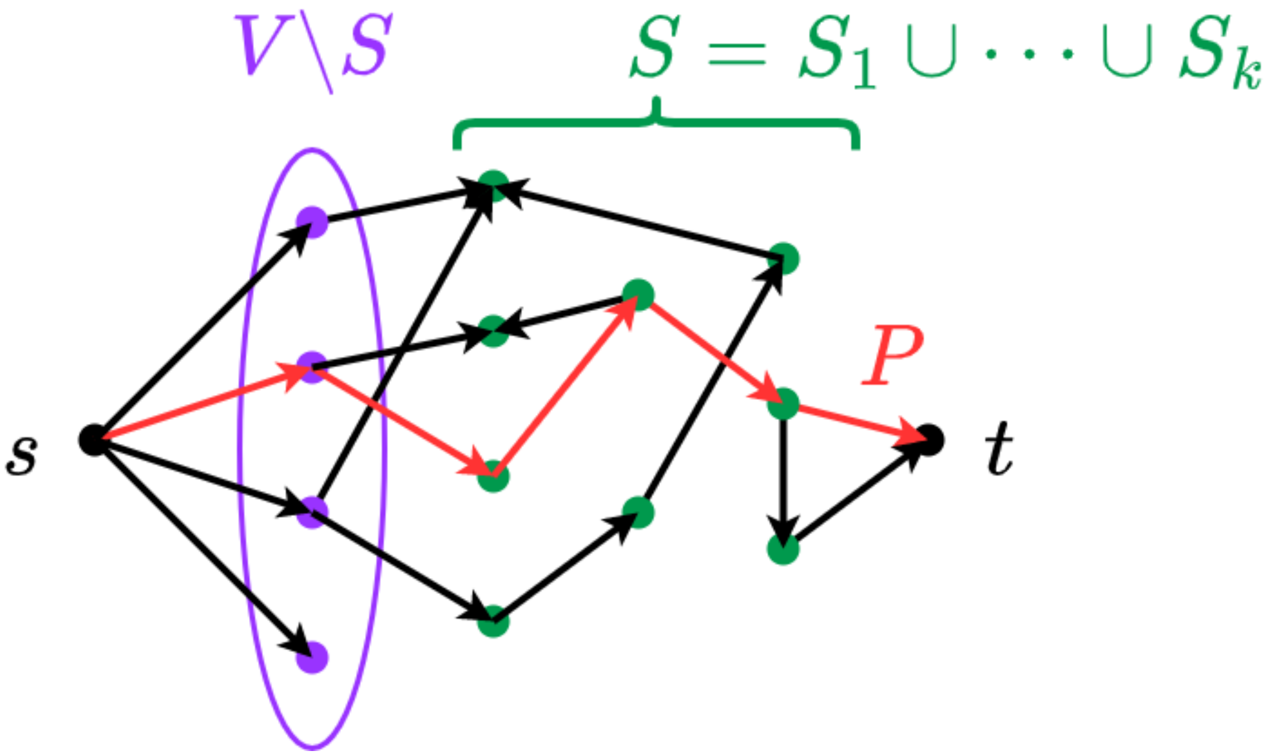


簡潔交換グラフ $G(S_1, \ldots, S_k)$

マトロイド分割問題に対するアルゴリズム

(Edmonds 1968)





簡潔交換グラフ $\boldsymbol{G}(S_1,\ldots,S_k)$

マトロイド分割問題の高速化

		独立性オラクルのクエリ回数
1968	Edmonds	$O(np^2 + kn)$
1986	Cunningham	$O(np^{3/2} + kn)$

$n = |V|$, マトロイドの個数 $\boldsymbol{k}$
解のサイズ $\boldsymbol{p}(\leq \boldsymbol{n})$

マトロイド分割問題の高速化

独立性オラクルのクエリ回数

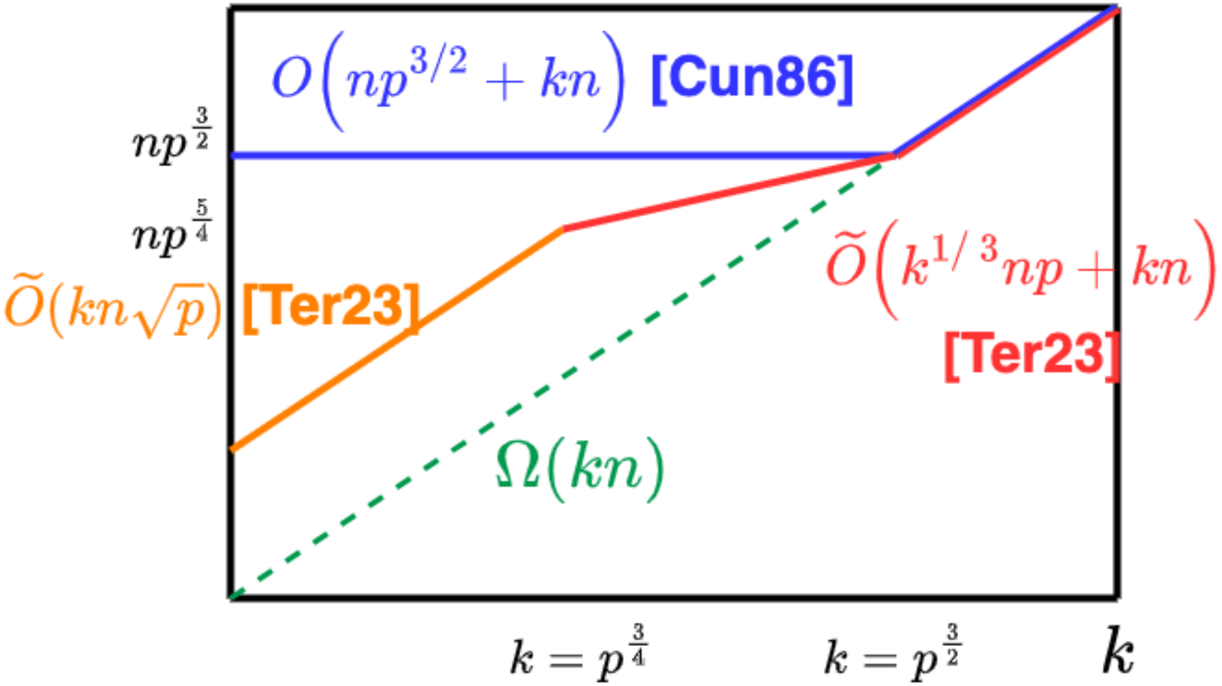
1968	Edmonds	$O(np^2 + kn)$
1986	Cunningham	$O(np^{3/2} + kn)$
2023	本研究	$\tilde{O}(kn\sqrt{p})$
2023	本研究	$\tilde{O}(k^{1/3}np + kn)$

$n = |V|$, マトロイドの個数 $\boldsymbol{k}$
解のサイズ $\boldsymbol{p}(\leq \boldsymbol{n})$

マトロイド分割問題の高速化

独立性オラクルのクエリ回数

1968	Edmonds	$O(np^2 + kn)$
1986	Cunningham	$O(np^{3/2} + kn)$
2023	本研究	$\tilde{O}(kn\sqrt{p})$
2023	本研究	$\tilde{O}(k^{1/3}np + kn)$



$n = |V|$, マトロイドの個数 k
解のサイズ $p(\leq n)$

提案アルゴリズム①：ブロッキングフロー

定理1

マトロイド分割問題は$\tilde{O}(kn\sqrt{p})$回の**独立性オラクル**の使用で解ける

$n = |V|$, マトロイドの個数 k
解のサイズ $p(\leq n)$

提案アルゴリズム①：ブロッキングフロー

定理1
マトロイド分割問題は$\tilde{O}(kn\sqrt{p})$回の**独立性オラクル**の使用で解ける

アイデア

ブロッキングフロー (Cunningham 1986)
☞ Hopcroft-KarpやDinicと類似

＋

二分探索で辺をみつける
(Nguyễn 2019, Chakrabarty et al. 2019)

同じ長さの増加路をまとめてみつける

提案アルゴリズム②：辺再利用型増加路探索

<u>定理2</u>
マトロイド分割問題は$\tilde{O}(k^{1/3}np + kn)$回の**独立性オラクル**の使用で解ける

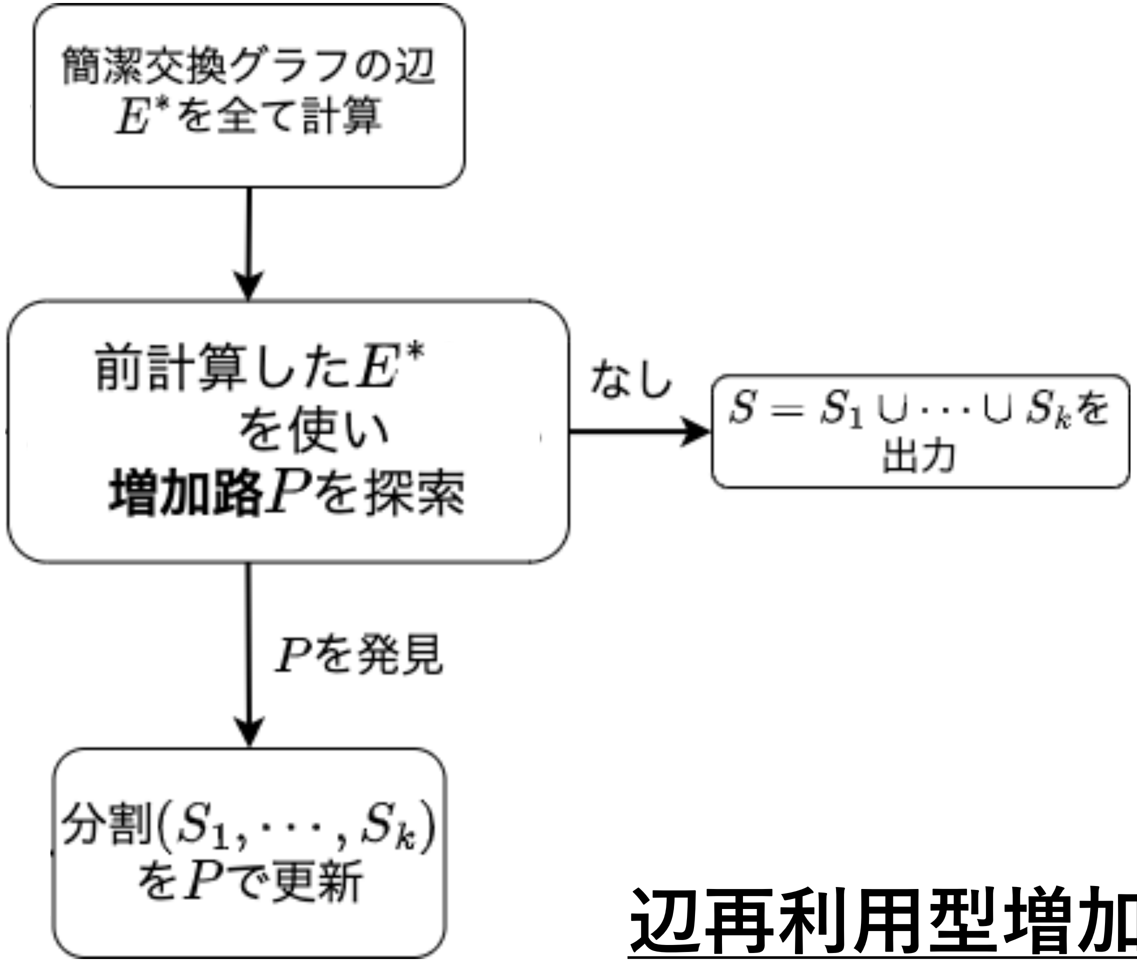
$n = |V|$, マトロイドの個数 k
解のサイズ $p(\leq n)$

提案アルゴリズム②：辺再利用型増加路探索

<u>定理2</u>

マトロイド分割問題は$\tilde{O}(k^{1/3}np + kn)$回の**独立性オラクル**の使用で解ける

<u>アイデア</u>

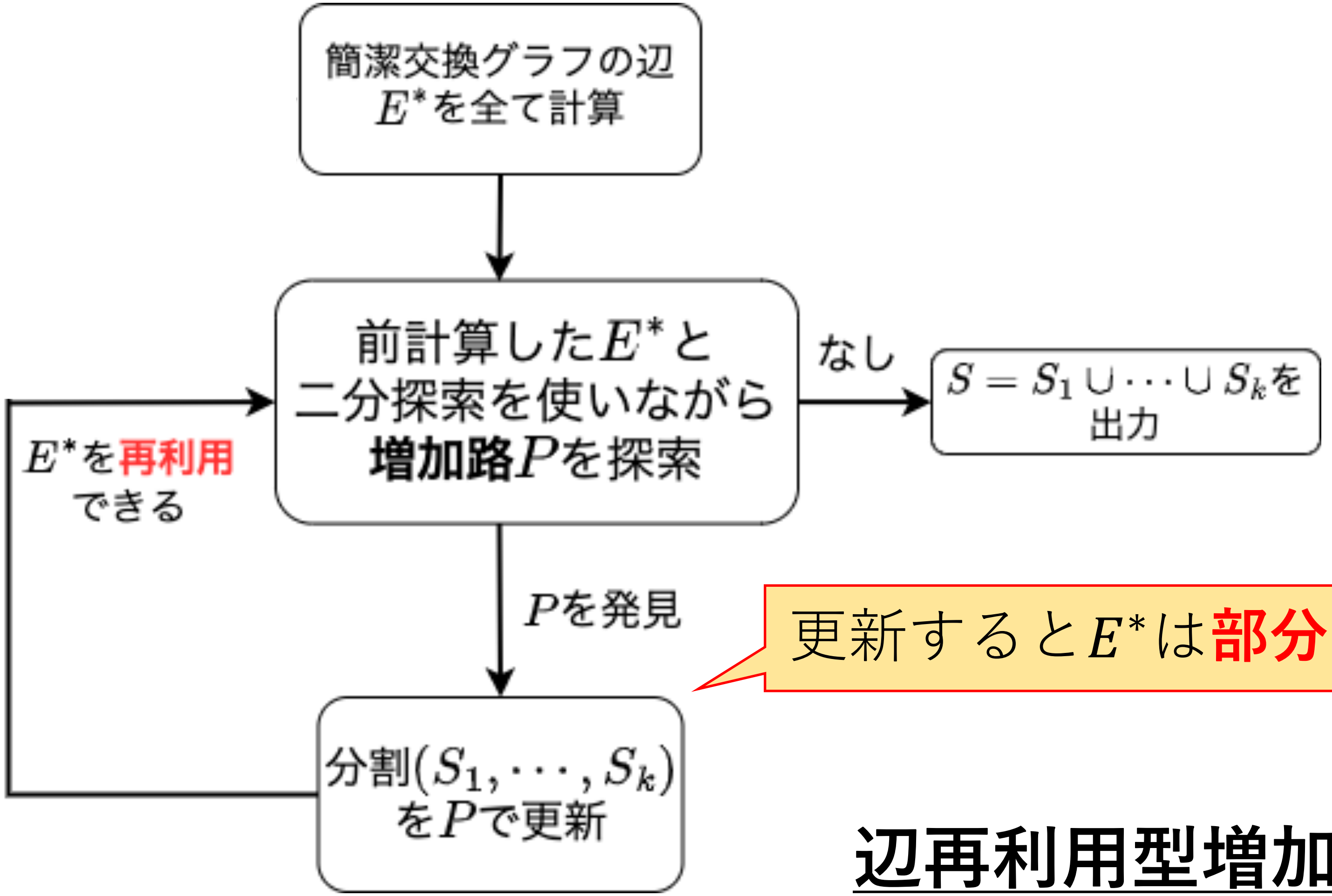


<u>辺再利用型増加路探索</u>　**NEW!!**

提案アルゴリズム②：辺再利用型増加路探索

定理2
マトロイド分割問題は$\tilde{O}(k^{1/3}np + kn)$回の**独立性オラクル**の使用で解ける

アイデア



更新するとE^*は**部分的に**別のものになる！

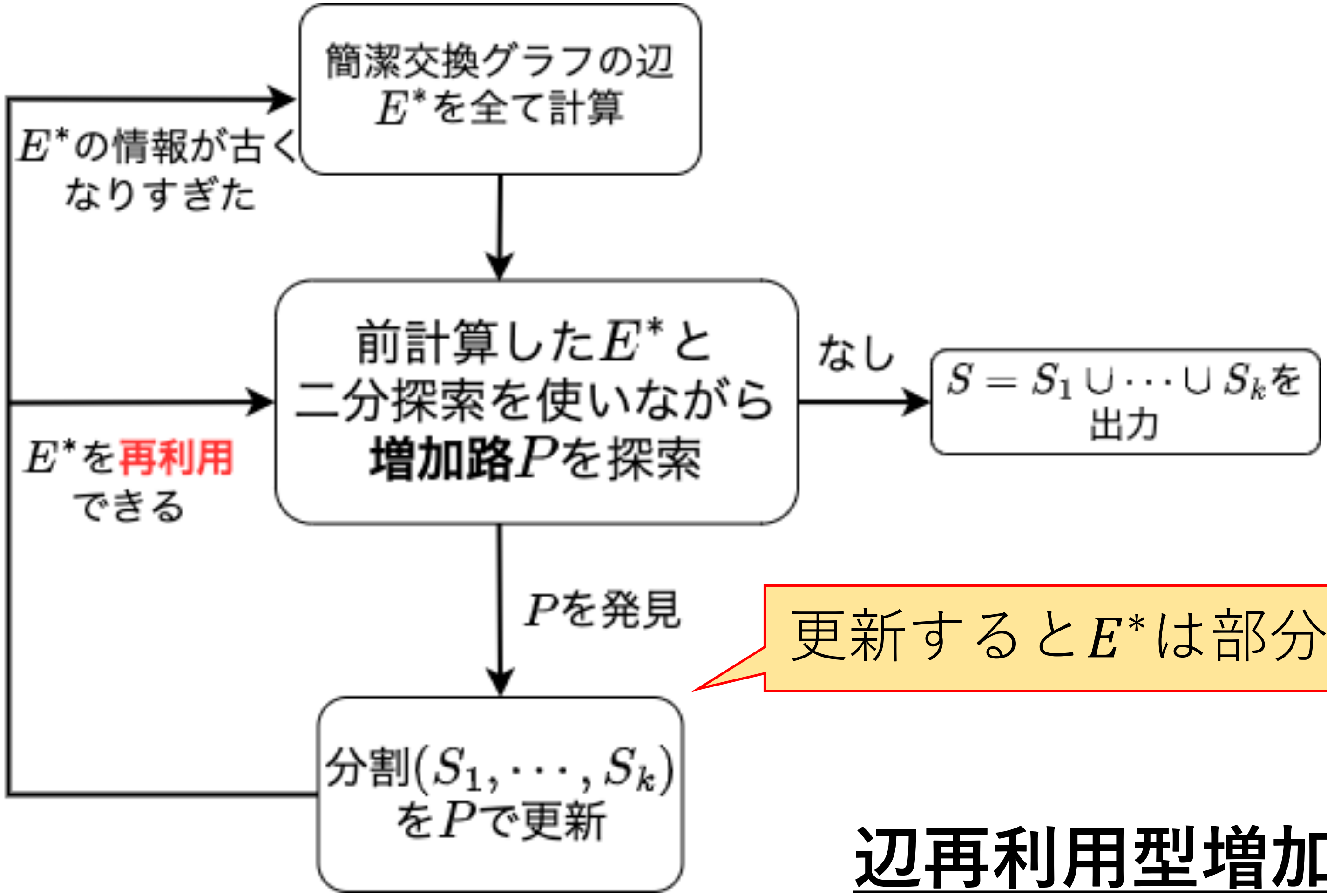
辺再利用型増加路探索

提案アルゴリズム②：辺再利用型増加路探索

定理2

マトロイド分割問題は$\tilde{O}(k^{1/3}np + kn)$回の**独立性オラクル**の使用で解ける

アイデア



更新するとE^*は部分的に別のものになる！

辺再利用型増加路探索

結論

マトロイド分割問題に対して**独立性オラクルの使用回数の少ない**アルゴリズムを設計

- **二分探索**により辺をみつけることで、簡潔交換グラフの辺を全て見ずに済む (Nguyễn 2019, Chakrabarty et al. 2019)
- **辺再利用型増加路探索**という新しいアイデア

Q. 本結果はさらに改善できるか？

Q. 辺再利用型増加路探索は他の問題にも適用できるか？