マトロイド上の最適化問題に対する高速なアルゴリズム

～汎用性の高い組合せ最適化問題に対する効率的解法～

寺尾 樹哉 (京都大学数理解析研究所 M2)

研究テーマ： 効率的なアルゴリズムの設計

実社会
交通
運送
インターネット
etc.

モデル化 → / ← 解法

組合せ最適化問題
最短路問題
マッチング問題
ナップサック問題
etc.

モデル化 → / ← 解法

抽象化した枠組み
マトロイド
劣モジュラー最適化
etc.

応用の可能性がある問題を個別に解いていくのは大変
☞ **抽象化することで、多くの問題を同時に扱うことができる！**

研究目標

汎用性の高い組合せ最適化問題に対する効率的なアルゴリズムを設計

研究の意義

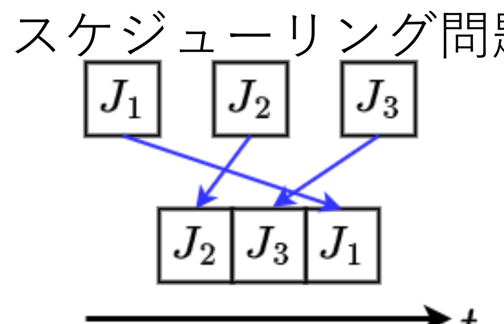
- 組合せ最適化を道具として使いやすく
- 一般的なモデルでの計算量の限界の探求
- 理論的興味

研究対象：マトロイド上の最適化問題

多くの問題を扱える抽象的な枠組み

多くの重要な問題が**マトロイド**でモデル化できる

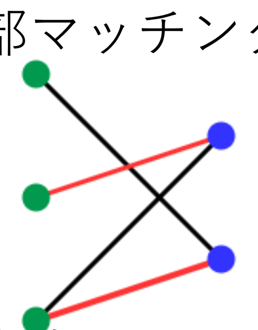
スケジューリング問題



全域木問題 etc.

マトロイドの最小基問題

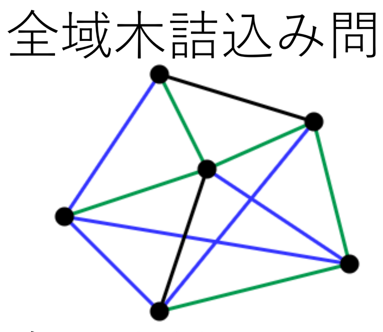
二部マッチング問題



有向木問題 etc.

マトロイド交叉問題

全域木詰込み問題



全域木被覆問題 etc.

マトロイド分割問題

既存研究

最近、Lee et al.[FOCS'15]によってマトロイド交叉問題の計算量が約30年ぶりに改善。

マトロイド交叉問題の計算量はChakrabarty et al.[FOCS'19], Blikstad et al.[STOC'21], Blikstad[ICALP'21]でさらに改善。

研究成果概要

マトロイド分割問題の計算量を約40年ぶりに改善

マトロイド：汎用性の高い抽象的な枠組み

定義

有限集合 V 上の空でない部分集合族 $\mathcal{I} \subseteq 2^V$ で次のよい性質を持つもの

- $S' \subseteq S \in \mathcal{I} \implies S' \in \mathcal{I}$
- $S, T \in \mathcal{I}, |S| > |T| \implies \exists\, e \in S - T$ s.t. $T \cup \{e\} \in \mathcal{I}$

例　グラフ的マトロイド, 分割マトロイド, 線形マトロイド

マトロイド分割問題

入力：k 個のマトロイド $\mathcal{M}_1 = (V, \mathcal{I}_1), \ldots, \mathcal{M}_k = (V, \mathcal{I}_k)$

出力：分割可能な最大サイズの集合 $S \subseteq V$

$\boldsymbol{S_i \in \mathcal{I}_i}$なる$\boldsymbol{S}$**の分割**$\boldsymbol{S = S_1 \cup \cdots \cup S_k}$が存在

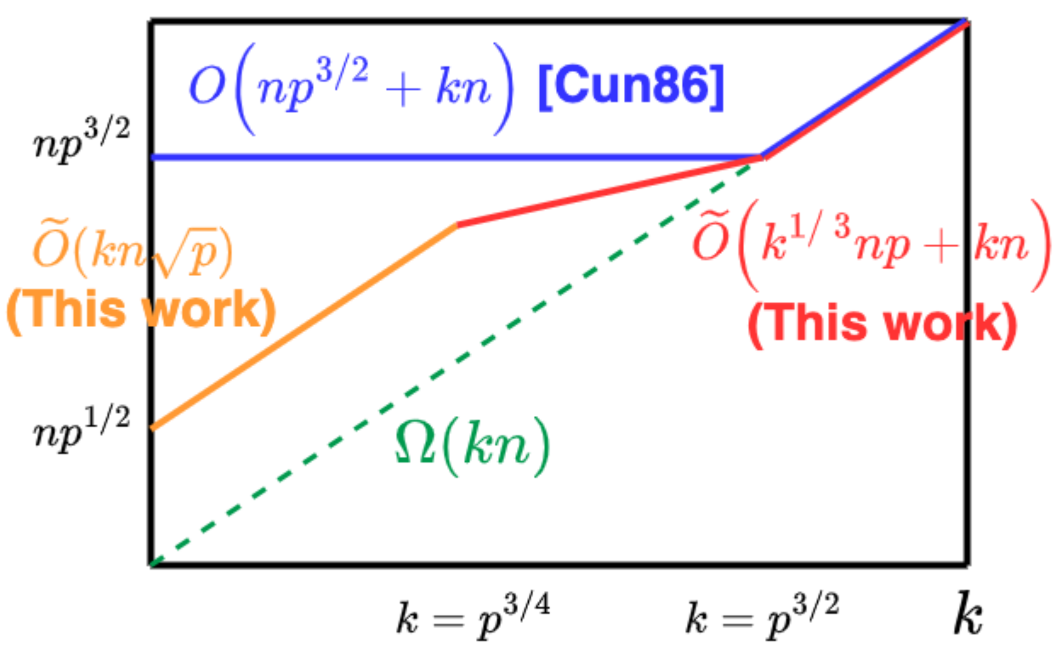
研究成果

成果：マトロイド分割問題に対する高速なアルゴリズム

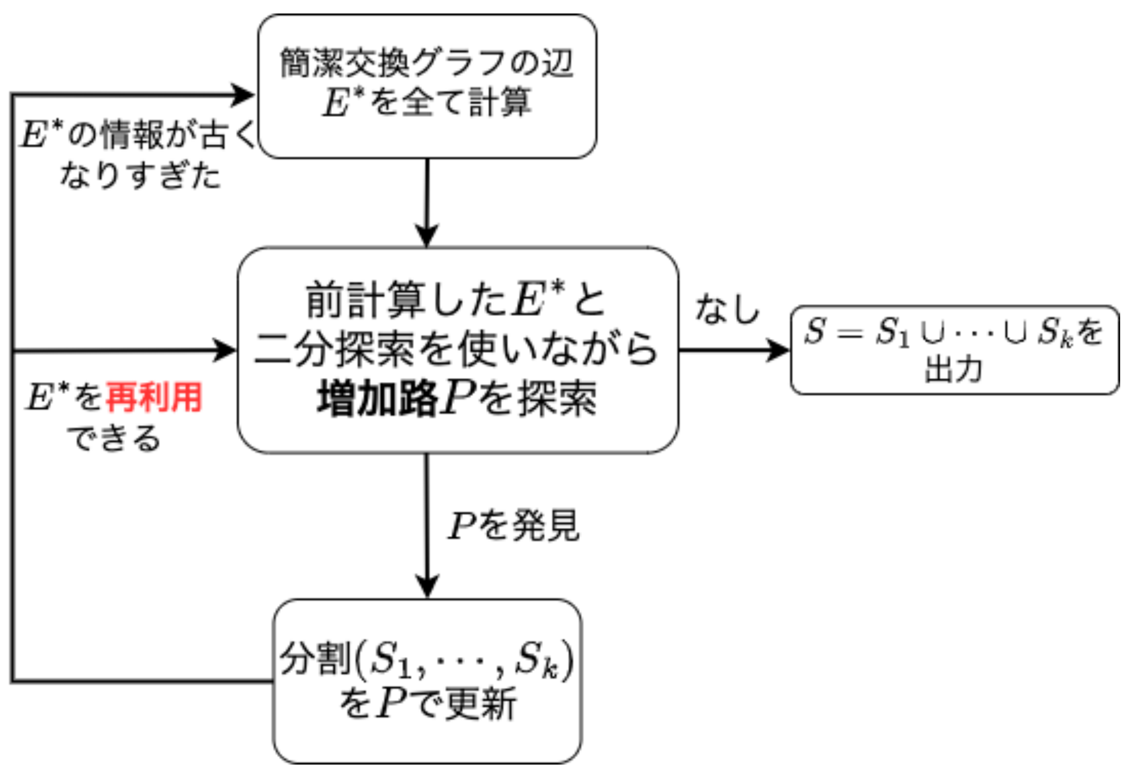
独立性オラクルへのクエリ回数

1968	Edmonds	$O(np^2 + kn)$
1986	Cunningham	$O(np^{3/2} + kn)$
2023	本研究	$\tilde{O}(kn\sqrt{p})$
2023	本研究	$\tilde{O}(k^{1/3}np + kn)$

$n = |V|$, マトロイドの個数 $\boldsymbol{k}$
解のサイズ $\boldsymbol{p}(\leq \boldsymbol{n})$



新しいアイデア：辺再利用型増加路探索



Tatsuya Terao : **Faster Matroid Partition Algorithms,** Proceedings of the 50th EATCS International Colloquium on Automata, Languages and Programming (**ICALP 2023**) (arXiv: 2303.05920)

理論計算機科学のトップ会議 **ICALP** に採択