除外ターミナルを含む同一面最短点素パス問題

小林 佑輔, 寺尾 樹哉

京都大学数理解析研究所

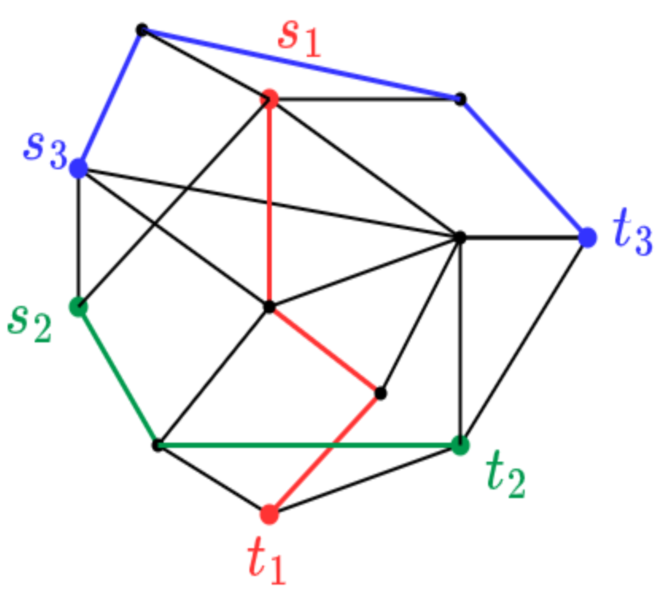
研究対象：点素パス問題

点素パス問題

パスが頂点を共有しない

入力： 頂点対 $(s_1, t_1), \ldots, (s_k, t_k)$

出力： 点素なパス $P_1, \ldots, P_k$ $(P_i: s_i \to t_i)$



- 多くの応用
  例：集積回路の設計，ネットワークの設計 (1980年代)
- 多項式時間で解けるか？が主な研究対象

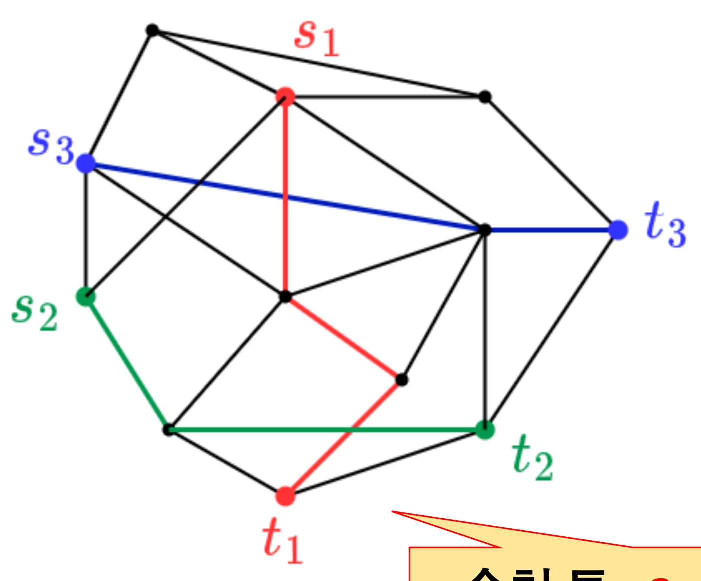
	有向グラフ	無向グラフ
k：定数	NP-困難 (Fortune et al.1980)	多項式時間 (Robertson &Seymour 1995)
k：変数	NP-困難 (Karp 1975)	NP-困難 (Karp 1975)

最短点素パス問題

入力： 頂点対 $(s_1, t_1), \ldots, (s_k, t_k)$

出力： 点素なパス $P_1, \ldots, P_k$ $(P_i: s_i \to t_i)$

s.t. パスの合計の長さが最小



合計長：3 + 2 + 2 = 7

- 自然な最適化問題
- 頂点対数 k：定数，無向グラフ
- 理論的計算量がほぼ未解明
  多項式時間で解けるか？
  NP困難か？

既存研究：最短点素パス問題が多項式時間で解けるケース

多項式行列を用いた代数的手法

- 頂点対数 $k = 2$ のとき 乱択多項式時間アルゴリズム (Björklund & Husfeldt 2014)

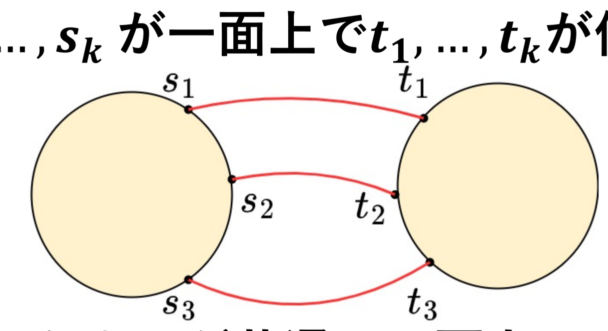
mod 4 のパーマネントの利用

- $k = 2$，平面グラフ，全頂点の次数が3以下のとき 決定的多項式時間アルゴリズム (Björklund & Husfeldt 2018)

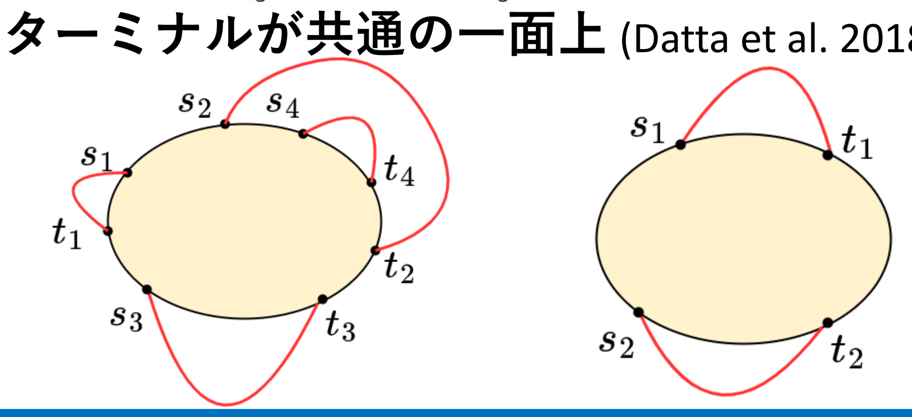
パフィアンの利用

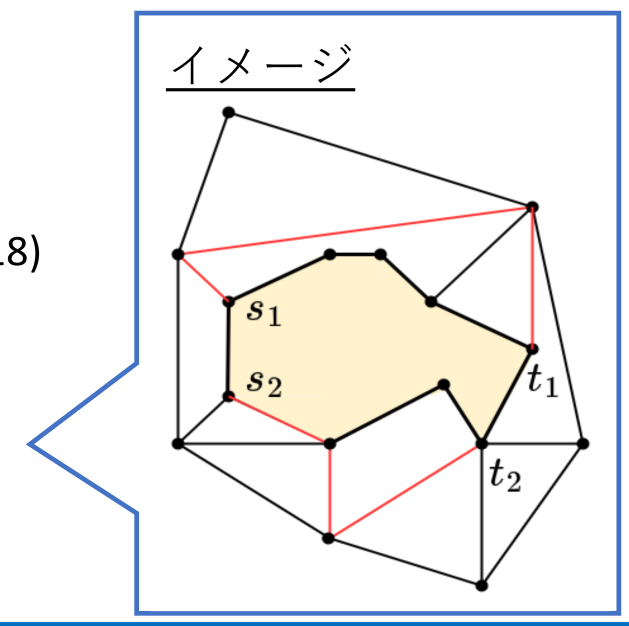
平面グラフで，頂点対に制約がある場合

- $s_1, \ldots, s_k$ が一面上で$t_1, \ldots, t_k$が他の一面上 (Colin de Verdière & Schrijver, 2011)



- ターミナルが共通の一面上 (Datta et al. 2018)





研究成果：除外ターミナルを含む同一面最短点素パス問題

入力： 平面グラフ，頂点対 $(s_1, t_1), \ldots, (s_k, t_k)$

一つのターミナルだけは共通の面上になくても良い

出力： 点素なパス $P_1, \ldots, P_k$ $(P_i: s_i \to t_i)$

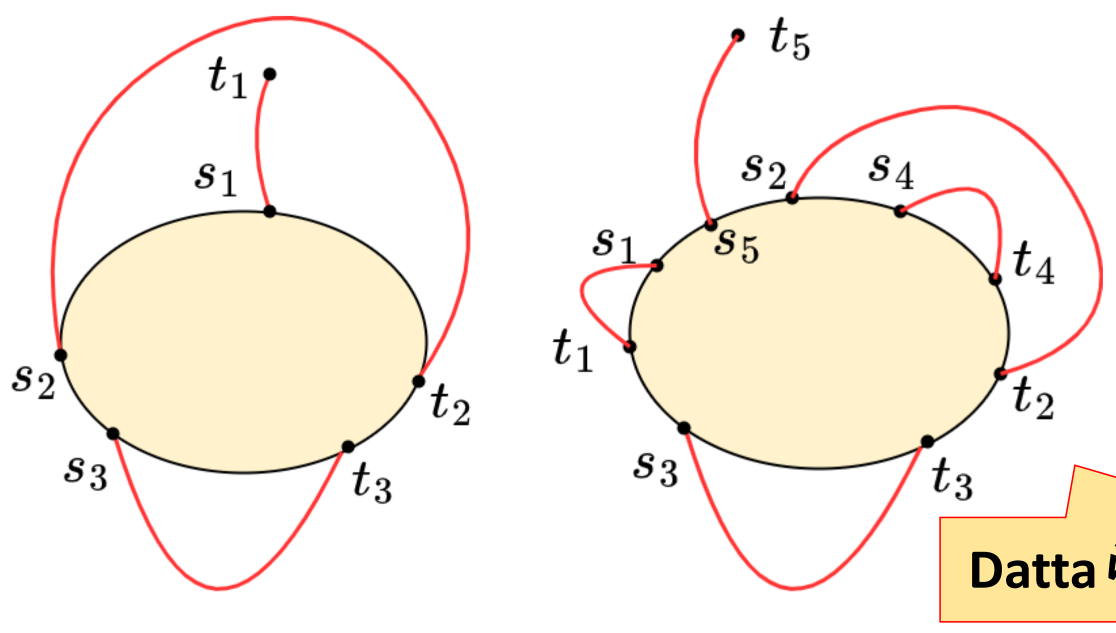
s.t. パスの合計の長さが最小

主結果

頂点対数 k：定数

除外ターミナルを含む同一面最短点素パス問題は

乱択多項式時間アルゴリズムで解ける

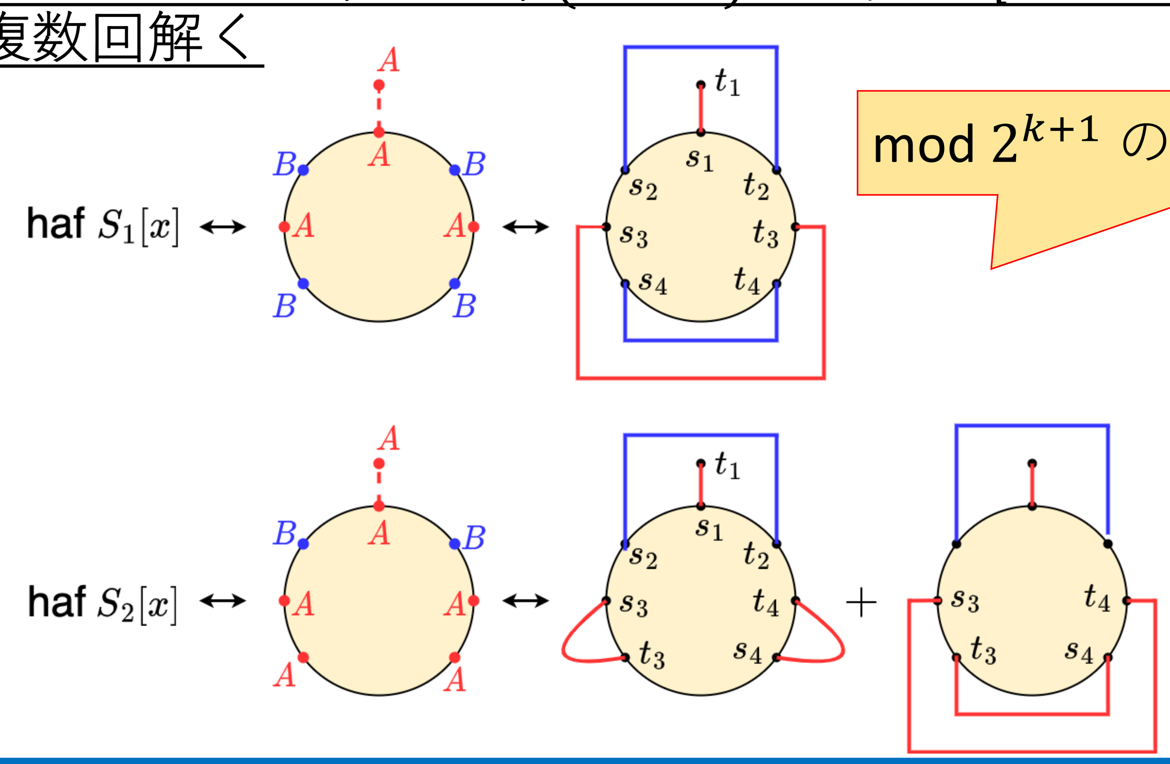


Dattaらの問題設定を拡張！

Yusuke Kobayashi, Tatsuya Terao : One-Face Shortest Disjoint Paths with a Deviation Terminal, Proceedings of the 33rd International Symposium on Algorithm and Computation (ISAAC 2022).

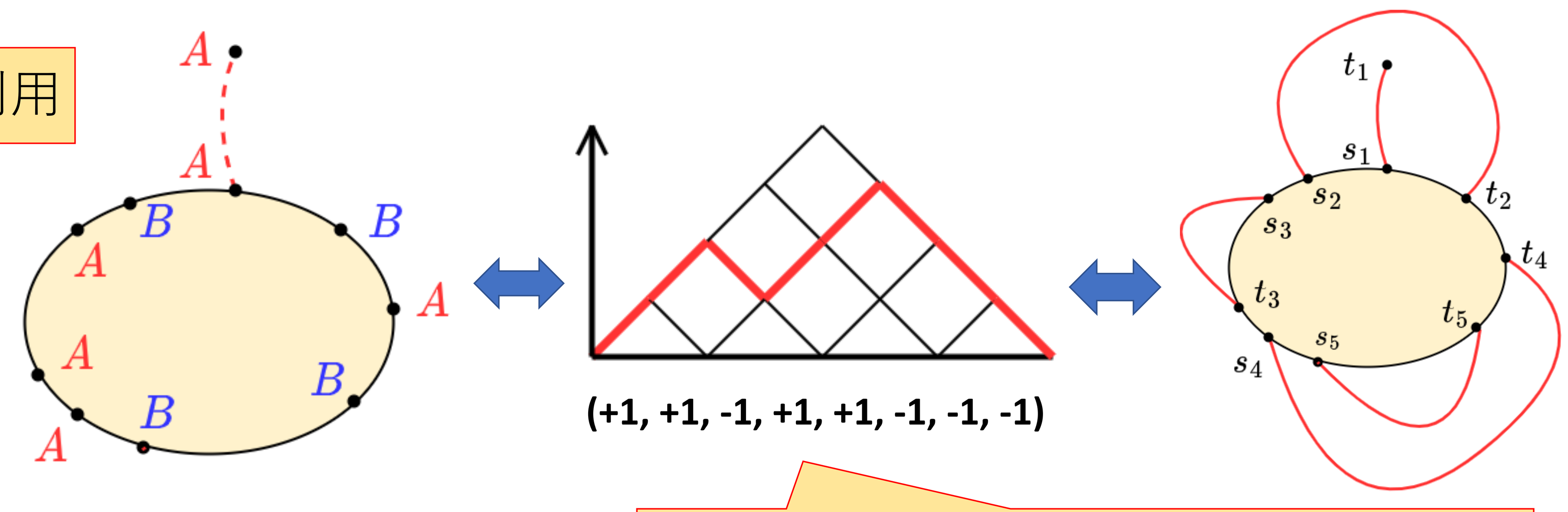
アルゴリズムにおけるアイデア

アルゴリズム：最短点素$(A+B)$パス問題 [HIrai &Namba 2018] を複数回解く



mod 2^{k+1} のパーマネントの利用

解法の鍵：$(\mathbf{A}, \mathbf{B})$-分割と頂点対のペアリングの対応



カタラン数と関係するような新しい組み合わせ論的発想