マトロイド制約下での劣モジュラ関数最大化に対する高速なアルゴリズム

<u>寺尾 樹哉</u>, 小林 佑輔

京都大学数理解析研究所

応用数理学会 2024年度年会 離散システム研究部会@京都大学　9月16日(月)

Yusuke Kobayashi, <u>Tatsuya Terao</u> : Subquadratic Submodular Maximization with a General Matroid Constraint,

In Proceedings of the 51st EATCS International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP 2024), 100:1–100:19.

劣モジュラ関数

<u>定義</u>

$f: 2^V \to \mathbb{R}$ で次の式を満たすもの

$$\boldsymbol{S \subseteq T \subseteq V, v \in V \setminus T \Rightarrow \underbrace{\boxed{f(S \cup \{v\}) - f(S)}}_{\text{小さい集合の増分}} \geq \underbrace{\boxed{f(T \cup \{v\}) - f(T)}}_{\text{大きい集合の増分}}}$$

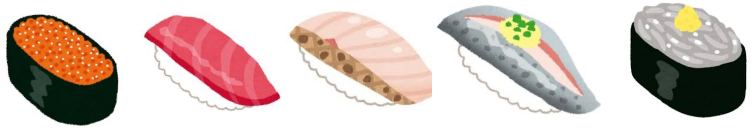
劣モジュラ関数

<u>定義</u>

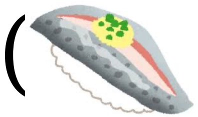
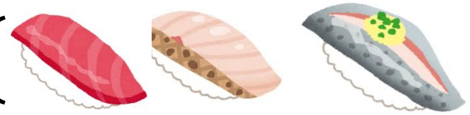
$f: 2^V \to \mathbb{R}$ で次の式を満たすもの

$$\boldsymbol{S \subseteq T \subseteq V, v \in V \setminus T \Rightarrow \underbrace{f(S \cup \{v\}) - f(S)}_{\text{小さい集合の増分}} \geq \underbrace{f(T \cup \{v\}) - f(T)}_{\text{大きい集合の増分}}}$$

<u>例</u>

$V = \{$  $\}$, $\boldsymbol{f}($  $) =$ うれしさ

<u>限界効用逓減性</u>

$f($  $) - f($  $) \geq f($  $) - f($  $)$

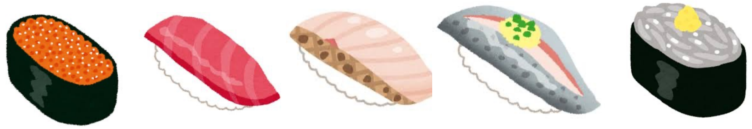
劣モジュラ関数

定義

$f: 2^V \to \mathbb{R}$ で次の式を満たすもの

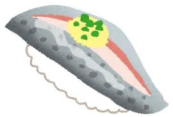
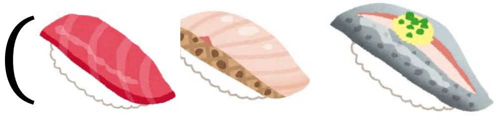
$$S \subseteq T \subseteq V, v \in V \setminus T \Rightarrow \underbrace{\boxed{f(S \cup \{v\}) - f(S)}}_{\text{小さい集合の増分}} \geq \underbrace{\boxed{f(T \cup \{v\}) - f(T)}}_{\text{大きい集合の増分}}$$

例

$V = \{$  $\}$, $f($  $) =$ うれしさ

限界効用逓減性

不可分財の効用を表現するのに適している！

$f($  $) - f($  $) \geq f($  $) - f($  $)$

単調劣モジュラ関数最大化

$f(S) \leq f(T) \ \ (S \subseteq T)$

$f: 2^V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$: **非負単調劣モジュラ**, $f(\emptyset) = 0$

$$\max \quad f(S) \quad \text{s.t.} \quad S \in \mathcal{C}$$

$|S| \leq r$ など

- 多くの問題の一般化
  例）最大被覆問題、施設配置問題
- 非常に多くの分野に実応用
  例）機械学習、コンピュータビジョン、経済学

サイズ制約下での単調劣モ最大化

[Fisher-Nemhauser-Wolsey 1978]

$f: 2^V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$: 非負単調劣モジュラ

$$\max \quad f(S) \quad \text{s.t.} \quad \boldsymbol{|S| \leq r}$$

☞ 簡単な貪欲アルゴリズムで **(1 − 1/e)近似**

$f(S) \geq (1 - 1/e)\, f(OPT)$を出力

☞ **近似比$1 - 1/e$は多項式時間アルゴリズムの中で最良**

[Nemhauser-Wolsey 1978]

サイズ制約下での単調劣モ最大化

$f: 2^V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$: 非負単調劣モジュラ

$$\max \quad f(S) \qquad \text{s.t.} \quad \boxed{|\boldsymbol{S}| \leq \boldsymbol{r}}$$

☞ 簡単な貪欲アルゴリズムで **(1 − 1/e)近似**

ナップサック制約 : $\sum_{v \in S} \boldsymbol{w_v} \leq \mathbf{1}$

サイズ制約 : $|\boldsymbol{S}| \leq \boldsymbol{r}$

拡張！

マトロイド制約 : $S \in \mathcal{I}$

マトロイド制約下での単調劣モ最大化

$f: 2^V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$: 非負単調劣モジュラ

$$\max \quad f(S) \quad \text{s.t.} \quad \boldsymbol{S \in \mathcal{I}}$$

☞ **(1 – 1/e)近似**アルゴリズム？

ナップサック制約 : $\sum_{v \in S} \boldsymbol{w_v} \leq \mathbf{1}$

サイズ制約 : $|\boldsymbol{S}| \leq \boldsymbol{r}$

拡張！

マトロイド制約 : $\boldsymbol{S \in \mathcal{I}}$

マトロイド制約下での単調劣モ最大化

$f: 2^V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$: 非負単調劣モジュラ

$$\max \quad f(S) \quad \text{s.t.} \quad \boxed{\boldsymbol{S \in \mathcal{I}}}$$

☞ **連続貪欲法**で**(1 − 1/e)近似**アルゴリズム
[Calinescu-Chekuri-Pál-Vondrák 2007]

ナップサック制約 : $\sum_{v \in S} \boldsymbol{w_v} \leq \mathbf{1}$

サイズ制約 : $|\boldsymbol{S}| \leq \boldsymbol{r}$

拡張！

マトロイド制約 : $\boldsymbol{S \in \mathcal{I}}$

マトロイド $\mathcal{M} = (V, \mathcal{I})$: 線形独立性の一般化

$\mathcal{I}$の要素を**独立**集合と呼ぶ

<u>定義</u>

有限集合 V 上の空でない部分集合族 $\mathcal{I} \subseteq 2^V$ で次のよい性質を持つもの

- $S' \subseteq S \in \mathcal{I} \implies S' \in \mathcal{I}$
- $S, T \in \mathcal{I},\ |S| > |T| \implies \exists\, v \in S - T$ s.t. $T \cup \{v\} \in \mathcal{I}$

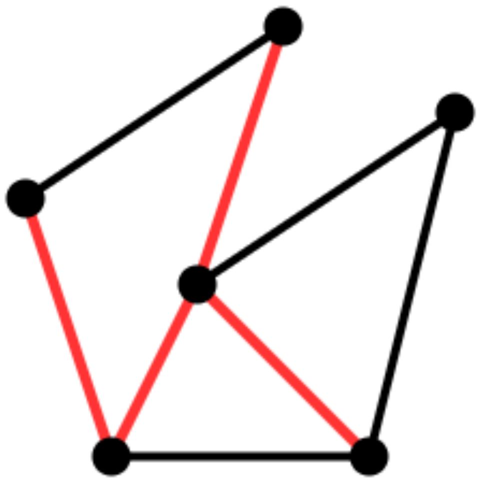
例）

- **線形マトロイド**

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

V = 行ベクトル
$\mathcal{I}$ = 線形独立

- **グラフ的マトロイド**



V = 辺集合
$\mathcal{I}$ = 森全体

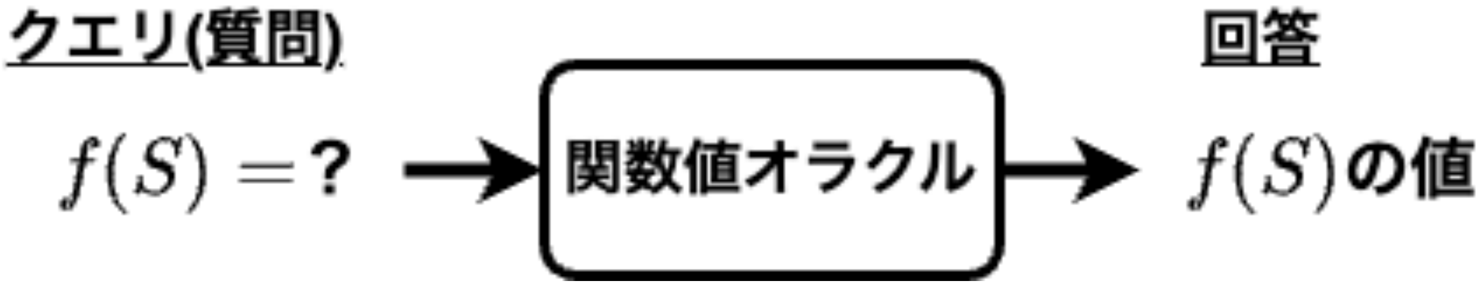
計算量の評価

Q. 劣モジュラ関数やマトロイドをどう扱うのか？

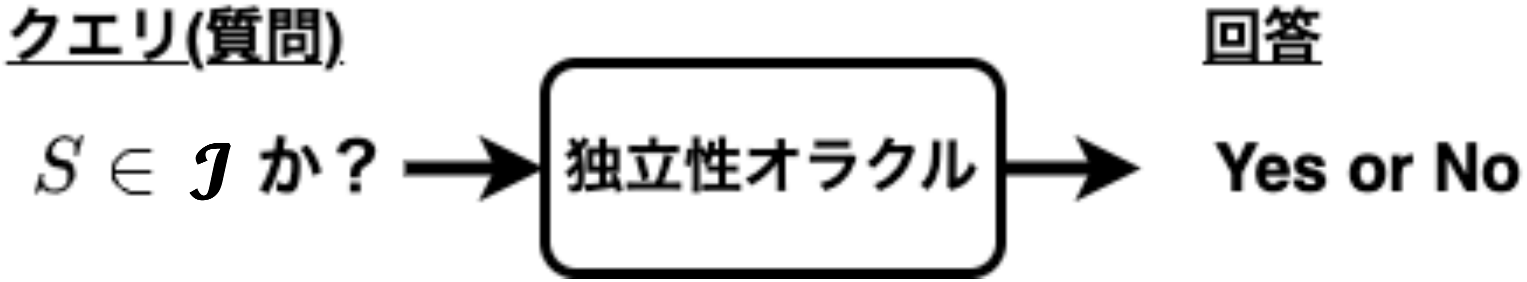
計算量の評価

Q. 劣モジュラ関数やマトロイドをどう扱うのか？

劣モジュラ関数へのアクセス



マトロイドへのアクセス



マトロイド制約下での単調劣モ最大化の $(\mathbf{1}-\mathbf{1}/\boldsymbol{e})$近似アルゴリズムの計算量

		クエリ回数
2007	Calinescu-Chekuri-Pál-Vondrák	$\tilde{O}(n^8)$

$n = |V|$, マトロイドのランク $\boldsymbol{r}(\leq \boldsymbol{n})$

マトロイド制約下での単調劣モ最大化の $(1-1/e-\epsilon)$近似アルゴリズムの計算量

		クエリ回数
2007	Calinescu-Chekuri-Pál-Vondrák	$\tilde{O}(n^8)$
2012	Filmus-Ward	$\tilde{O}_\epsilon(rn^4)$
2014	Badanidiyuru-Vondrák	$\tilde{O}_\epsilon(rn)$
2015	Buchbinder-Feldman-Schwartz	$\tilde{O}_\epsilon(r^2+\sqrt{r}n)$

$n = |V|$, マトロイドのランク $\boldsymbol{r}(\leq \boldsymbol{n})$

マトロイド制約下での単調劣モ最大化の $(\mathbf{1}-\mathbf{1}/\boldsymbol{e}-\boldsymbol{\epsilon})$近似アルゴリズムの計算量

		クエリ回数
2007	Calinescu-Chekuri-Pál-Vondrák	$\tilde{O}(n^8)$
2012	Filmus-Ward	$\tilde{O}_\epsilon(rn^4)$
2014	Badanidiyuru-Vondrák	$\tilde{O}_\epsilon(rn)$
2015	Buchbinder-Feldman-Schwartz	$\tilde{O}_\epsilon(r^2+\sqrt{r}n)$
2024	**本研究**	$\tilde{\boldsymbol{O}}_{\boldsymbol{\epsilon}}(\sqrt{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{n})$

$n=|V|$, マトロイドのランク $\boldsymbol{r}(\leq \boldsymbol{n})$

連続貪欲法 [Calinescu-Chekuri-Pál-Vondrák 2007]

元問題

$\max f(S)$ s.t. $S \in \mathcal{I}$

劣モジュラ関数 $f: 2^V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

連続貪欲法 [Calinescu-Chekuri-Pál-Vondrák 2007]

① 連続緩和

元問題

$\max f(S)$ s.t. $S \in \mathcal{I}$

→

緩和問題

$\max F(x)$ s.t. $x \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$

多重線形拡張 $F: [0,1]^V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

$F(x) = \sum_{S \subseteq V} f(S) \prod_{v \in S} x_v \prod_{v \in V \setminus S} (1 - x_v)$

マトロイド基多面体

$\mathcal{B}(\mathcal{M}) = \mathrm{conv}\,\{\chi_B \mid B \in \mathcal{B}\}$

連続貪欲法 [Calinescu-Chekuri-Pál-Vondrák 2007]

① 連続緩和

元問題

max $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{S})$ s.t. $\boldsymbol{S} \in \boldsymbol{\mathcal{I}}$

緩和問題

max $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ s.t. $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{B}}(\boldsymbol{\mathcal{M}})$

② 連続最適化

$\boldsymbol{x} \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$

s.t.

$\mathbb{E}[\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})] \geq (\mathbf{1} - \mathbf{1}/\boldsymbol{e} - \boldsymbol{\epsilon})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{OPT})$

連続貪欲法 [Calinescu-Chekuri-Pál-Vondrák 2007]

① 連続緩和

元問題

max $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{S})$ s.t. $\boldsymbol{S} \in \mathcal{I}$

緩和問題

max $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ s.t. $\boldsymbol{x} \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$

② 連続最適化

$\boldsymbol{x} \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$

s.t.

$\mathbb{E}[\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})] \geq (\mathbf{1} - \mathbf{1}/\boldsymbol{e} - \boldsymbol{\epsilon})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{OPT})$

③丸め

$\boldsymbol{S} \in \mathcal{I}$

s.t.

$\mathbb{E}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{S})] \geq (\mathbf{1} - \mathbf{1}/\boldsymbol{e} - \boldsymbol{\epsilon})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{OPT})$

連続貪欲法の高速化

元問題

$\max f(S)$ s.t. $S \in \mathcal{I}$

緩和問題

$\max F(x)$ s.t. $x \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$

①連続緩和

②連続最適化

$\tilde{O}_\epsilon(rn)$**回クエリ**

[Badanidiyuru-Vondrák 2014]

$x \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$

s.t.

$\mathbb{E}[F(x)] \geq (1 - 1/e - \epsilon) f(OPT)$

③丸め

$S \in \mathcal{I}$

s.t.

$\mathbb{E}[f(S)] \geq (1 - 1/e - \epsilon) f(OPT)$

連続貪欲法の高速化

元問題

max $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{S})$ s.t. $\boldsymbol{S} \in \boldsymbol{\mathcal{I}}$

緩和問題

max $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ s.t. $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{B}}(\boldsymbol{\mathcal{M}})$

①連続緩和

②連続最適化

$\widetilde{\boldsymbol{O}}_{\epsilon}(\boldsymbol{rn})$**回クエリ**

[Badanidiyuru-Vondrák 2014]

$\boldsymbol{x} \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$

s.t.

$\mathbb{E}[\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})] \geq (\mathbf{1} - \mathbf{1}/\boldsymbol{e} - \boldsymbol{\epsilon})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{OPT})$

$\boldsymbol{S} \in \mathcal{J}$

s.t.

$\mathbb{E}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{S})] \geq (\mathbf{1} - \mathbf{1}/\boldsymbol{e} - \boldsymbol{\epsilon})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{OPT})$

③丸め

$\boldsymbol{O}_{\epsilon}(\boldsymbol{r}^{2})$**回クエリ** [Chekuri-Vondrák-Zenklusen 2010]

連続貪欲法の高速化

元問題

$\max f(S)$ s.t. $S \in \mathcal{I}$

①連続緩和

緩和問題

$\max F(x)$ s.t. $x \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$

②連続最適化

$\tilde{O}_\epsilon(\sqrt{r}n)$**回クエリ**

[Buchbinder et al. 2015]

$x \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$

s.t.

$\mathbb{E}[F(x)] \geq (1 - 1/e - \epsilon)f(OPT)$

$S \in \mathcal{I}$

s.t.

$\mathbb{E}[f(S)] \geq (1 - 1/e - \epsilon)f(OPT)$

③丸め

$O_\epsilon(r^2)$**回クエリ** [Chekuri-Vondrák-Zenklusen 2010]

連続貪欲法の高速化

元問題

max $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{S})$ s.t. $\boldsymbol{S} \in \boldsymbol{\mathcal{I}}$

①連続緩和

緩和問題

max $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ s.t. $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{B}}(\boldsymbol{\mathcal{M}})$

②連続最適化

$\boldsymbol{\tilde{O}_\epsilon(\sqrt{r}n)}$**回クエリ**

[Buchbinder et al. 2015]

$\boldsymbol{x} \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$

s.t.

$\mathbb{E}[\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})] \geq (\boldsymbol{1} - \boldsymbol{1}/\boldsymbol{e} - \boldsymbol{\epsilon})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{OPT})$

③丸め

$\boldsymbol{S} \in \mathcal{J}$

s.t.

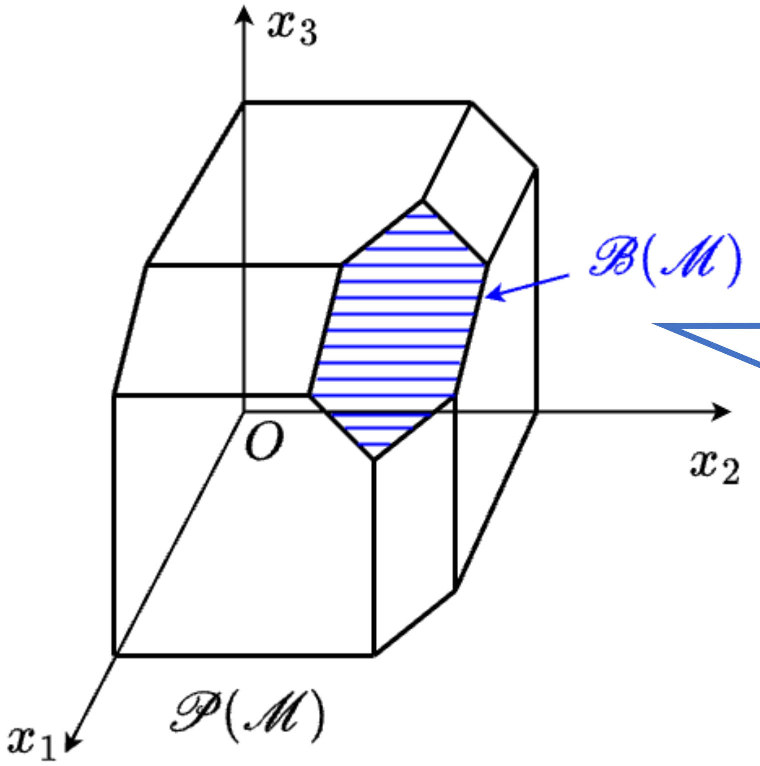
$\mathbb{E}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{S})] \geq (\boldsymbol{1} - \boldsymbol{1}/\boldsymbol{e} - \boldsymbol{\epsilon})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{OPT})$

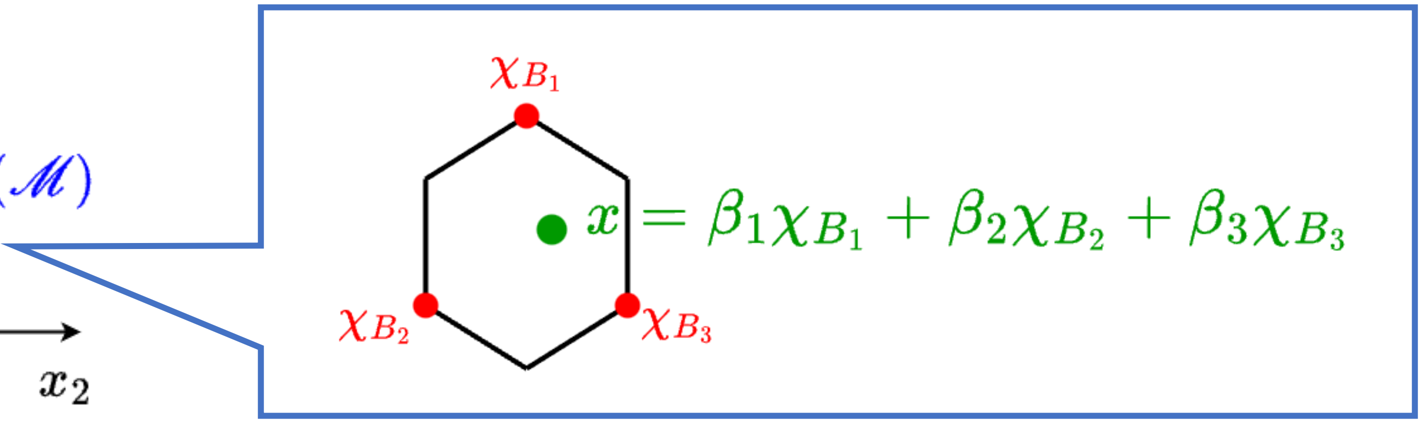
$\boldsymbol{\tilde{O}_\epsilon(r^{3/2})}$**回クエリ** [本研究]

Swap丸めアルゴリズム [Chekuri-Vondrák-Zenklusen 2010]

$\boldsymbol{x = \beta_1 \chi_{B_1} + \cdots + \beta_t \chi_{B_t}}$

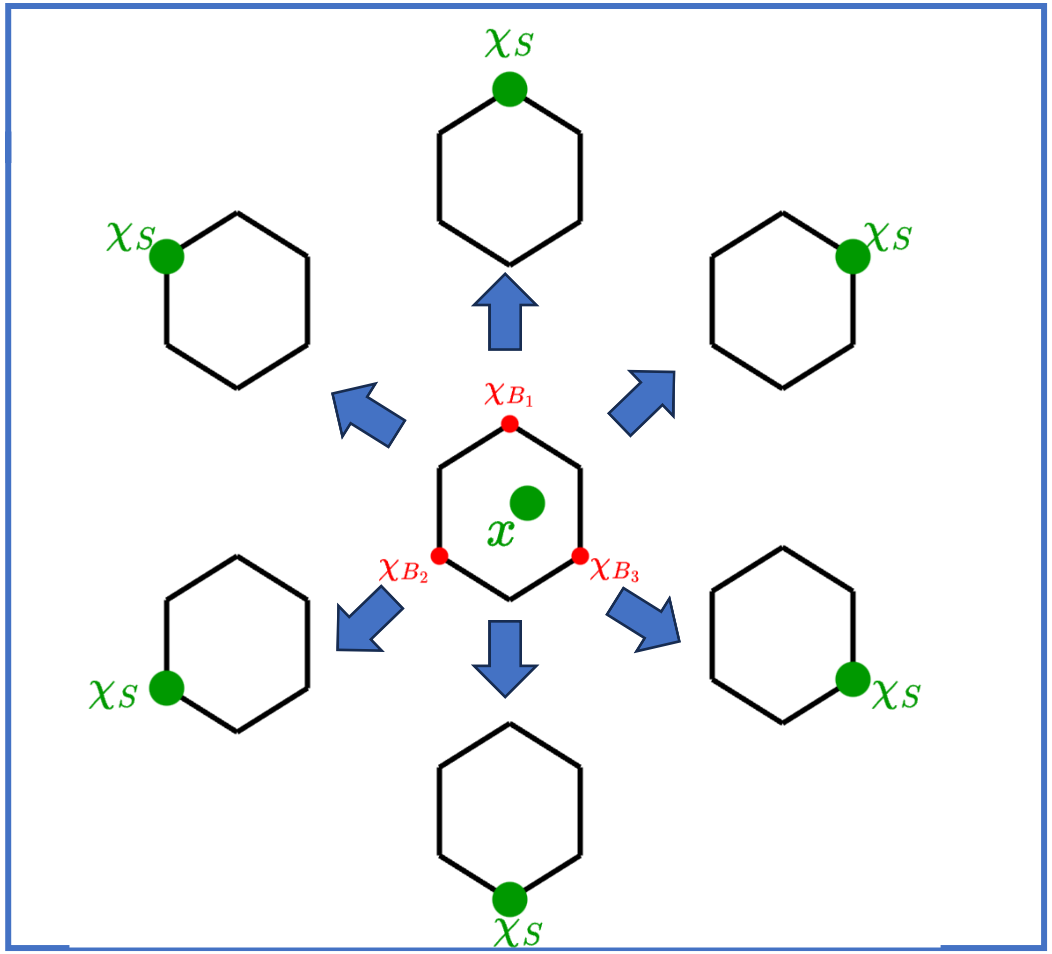
入力: $\mathcal{M} = (V, \mathcal{I})$, t個の基の凸結合で与えられる点 $x \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$





Swap丸めアルゴリズム [Chekuri-Vondrák-Zenklusen 2010]

入力: $\mathcal{M} = (V, \mathcal{I})$, t個の基の凸結合で与えられる点 $x \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$
出力: $\mathcal{M}$の基 S s.t. 任意の劣モ関数fに対して$\mathbb{E}[\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\chi_S})] \geq \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$



$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\chi_S}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{S})$

高速な丸めアルゴリズム

入力: $\mathcal{M} = (V, \mathcal{I})$, t個の基の凸結合で与えられる点 $x \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$
出力: $\mathcal{M}$の基 S s.t. 任意の劣モ関数fに対して$\mathbb{E}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{S})] \geq (\mathbf{1} - \boldsymbol{\epsilon})\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$

定理 [Chekuri-Vondrák-Zenklusen 2010]
$\boldsymbol{O}(\boldsymbol{r}^2\boldsymbol{t})$回の独立性オラクルの使用

定理 [本研究]
$\tilde{\boldsymbol{O}}_{\epsilon}(\boldsymbol{r}^{3/2}\boldsymbol{t})$回の独立性オラクルの使用

Swap丸めアルゴリズム [Chekuri-Vondrák-Zenklusen 2010]

SwapRound($\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta_1 \chi_{B_1}} + \cdots + \boldsymbol{\beta_t \chi_{B_t}}$)

$C_1 \leftarrow B_1, \gamma_1 \leftarrow \beta_1$

For $i = 1, \dots t - 1$:

$C_{i+1} \leftarrow$ **MergeBases**$(\gamma_i, C_i, \beta_{i+1}, B_{i+1})$

$\gamma_{i+1} \leftarrow \gamma_i + \beta_{i+1}$

Return C_t

Swap丸めアルゴリズム　[Chekuri-Vondrák-Zenklusen 2010]

SwapRound($\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta_1 \chi_{B_1}} + \cdots + \boldsymbol{\beta_t \chi_{B_t}}$)

$C_1 \leftarrow B_1, \gamma_1 \leftarrow \beta_1$

For $i = 1, \dots t - 1$:

$C_{i+1} \leftarrow$ **MergeBases**$(\gamma_i, C_i, \beta_{i+1}, B_{i+1})$

$\gamma_{i+1} \leftarrow \gamma_i + \beta_{i+1}$

Return C_t

MergeBases$(\beta_1, B_1, \beta_2, B_2)$

While $B_1 \neq B_2$:

(Step1) Find v, u such that $B_1 + v - u \in \mathcal{I}$ and $B_2 + u - v \in \mathcal{I}$

(Step2) $B_1 \leftarrow B_1 + v - u$ w.p. $\beta_2/(\beta_1 + \beta_2)$

$B_2 \leftarrow B_2 + u - v$ w.p. $\beta_1/(\beta_1 + \beta_2)$

Swap丸めアルゴリズム　[Chekuri-Vondrák-Zenklusen 2010]

SwapRound($\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta_1 \chi_{B_1}} + \cdots + \boldsymbol{\beta_t \chi_{B_t}}$)

$C_1 \leftarrow B_1, \gamma_1 \leftarrow \beta_1$

For $i = 1, \ldots t - 1$:

$C_{i+1} \leftarrow$ **MergeBases**$(\gamma_i, C_i, \beta_{i+1}, B_{i+1})$

$\gamma_{i+1} \leftarrow \gamma_i + \beta_{i+1}$

Return C_t

MergeBases$(\beta_1, B_1, \beta_2, B_2)$

While $B_1 \neq B_2$:

(Step1) **Find $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}$ such that $\boldsymbol{B_1 + v - u \in \mathcal{I}}$ and $\boldsymbol{B_2 + u - v \in \mathcal{I}}$**

$\boldsymbol{O(r)}$ 回クエリ

(Step2) $B_1 \leftarrow B_1 + v - u$ w.p. $\beta_2/(\beta_1 + \beta_2)$

$B_2 \leftarrow B_2 + u - v$ w.p. $\beta_1/(\beta_1 + \beta_2)$

Swap丸めアルゴリズム [Cekuri-Vondrák-Zenklusen 2010]

定理 [Chekuri-Vondrák-Zenklusen 2010]
$O(r^2 t)$ 回の独立性クエリを使用

SwapRound($\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta_1 \chi_{B_1}} + \cdots + \boldsymbol{\beta_t \chi_{B_t}}$)
  $C_1 \leftarrow B_1, \gamma_1 \leftarrow \beta_1$
  For $i = 1, \ldots t-1$:
    $C_{i+1} \leftarrow$ **MergeBases**$(\gamma_i, C_i, \beta_{i+1}, B_{i+1})$
    $\gamma_{i+1} \leftarrow \gamma_i + \beta_{i+1}$
  Return C_t

MergeBases$(\beta_1, B_1, \beta_2, B_2)$
  While $B_1 \neq B_2$:
    (Step1) **Find $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}$ such that $\boldsymbol{B_1} + \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{\mathcal{I}}$ and $\boldsymbol{B_2} + \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{I}}$**
    (Step2) $B_1 \leftarrow B_1 + v - u$ w.p. $\beta_2/(\beta_1 + \beta_2)$
        $B_2 \leftarrow B_2 + u - v$ w.p. $\beta_1/(\beta_1 + \beta_2)$

$O(r)$ 回クエリ

事実: Step1 は $O(rt)$ 回実行

事実: Step2で$\mathbb{E}[F(x)]$は非減少

技術的貢献①: 任意の長さの閉路でも良い

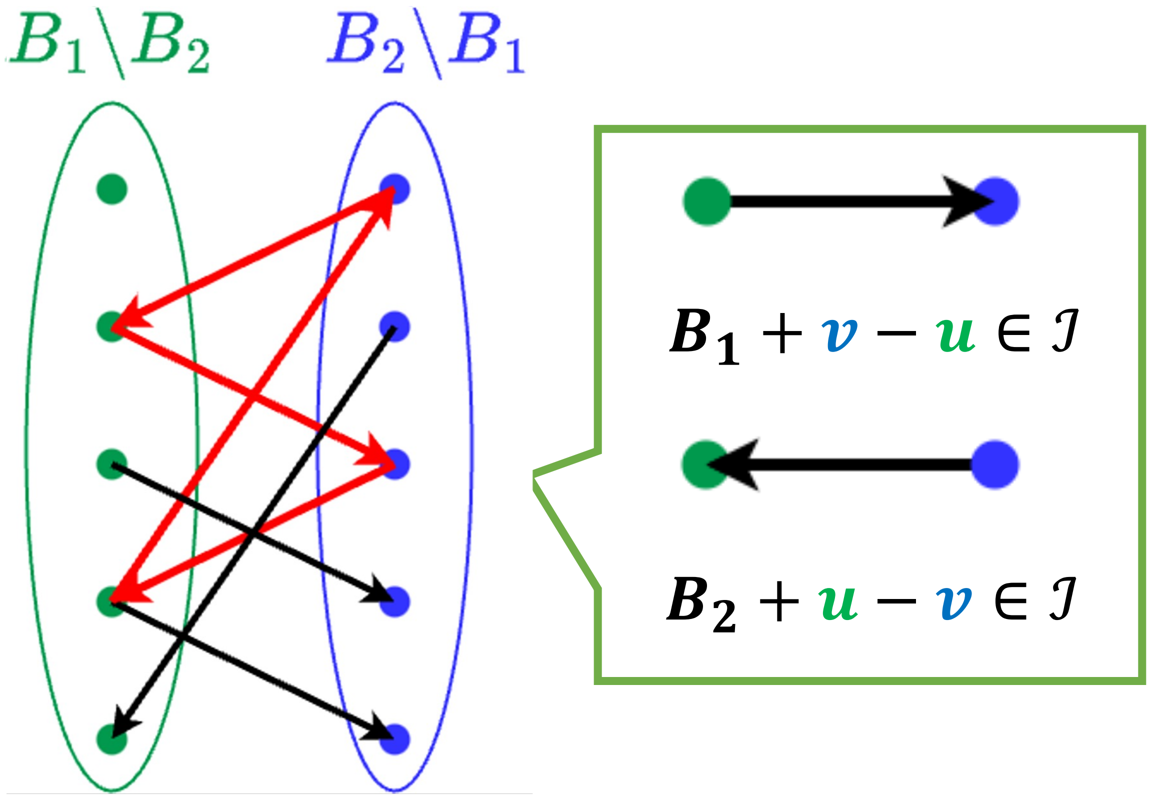
- [Chekuri-Vondrák-Zenklusen 2010]

$B_1 + v - u \in \mathcal{I}$ かつ $B_2 + u - v \in \mathcal{I}$なる2要素 v, u を使用

拡張！

- [本研究]

任意の長さの有向**閉路**を使用



技術的貢献①: 任意の長さの閉路でも良い

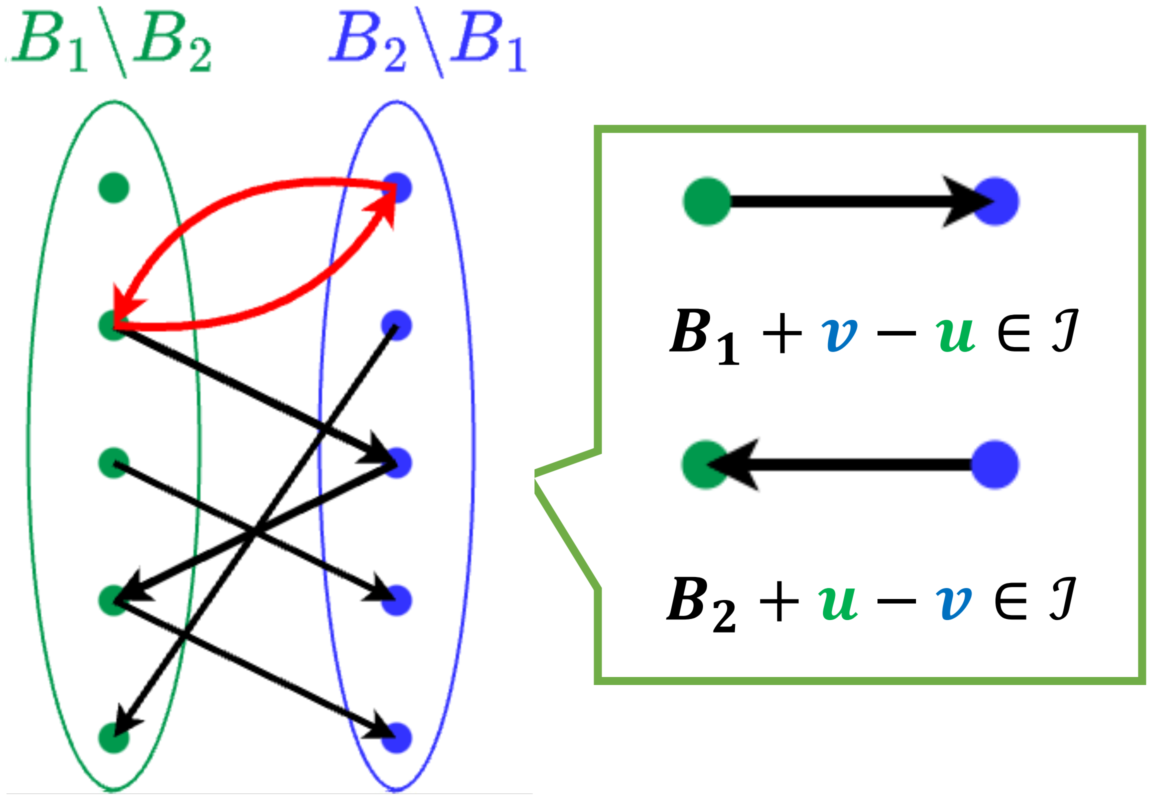
- [Chekuri-Vondrák-Zenklusen 2010]

$B_1 + v - u \in \mathcal{I}$ かつ $B_2 + u - v \in \mathcal{I}$ なる2要素 v, u を使用

長さ2の有向**閉路** (双方向辺)

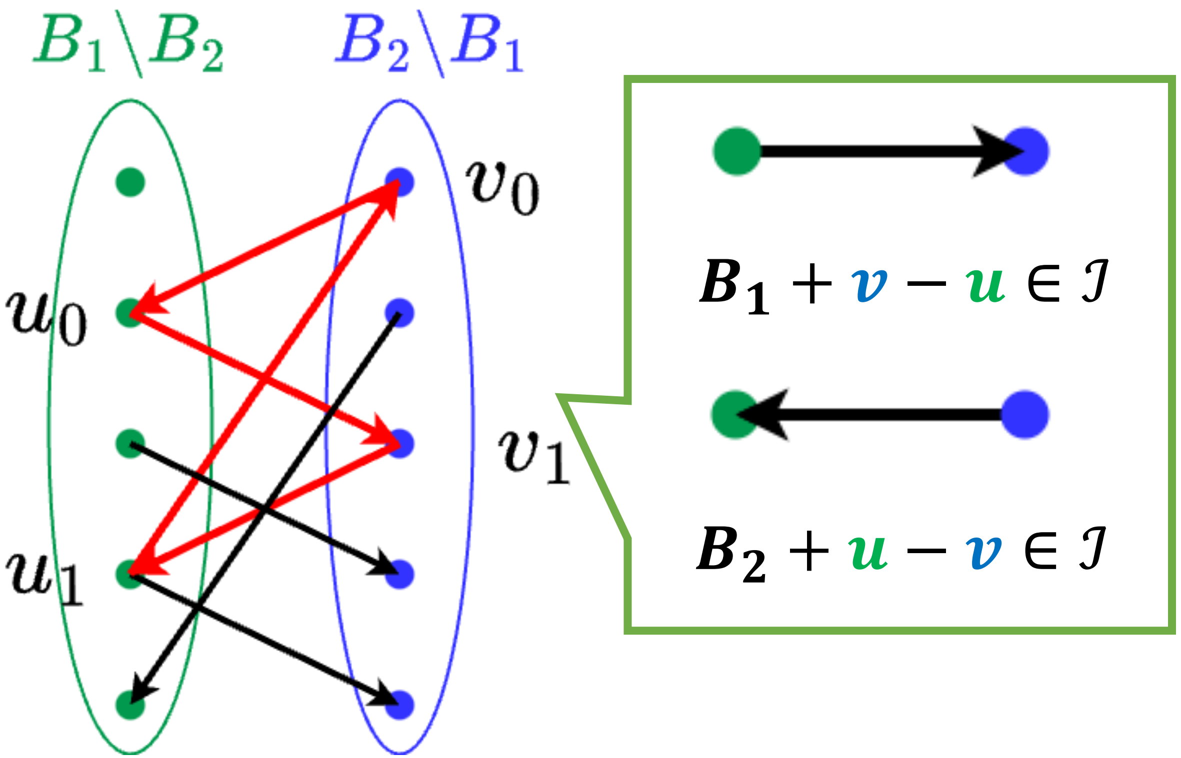
- [本研究]

任意の長さの有向**閉路**を使用



技術的貢献①: 任意の長さの閉路でも良い

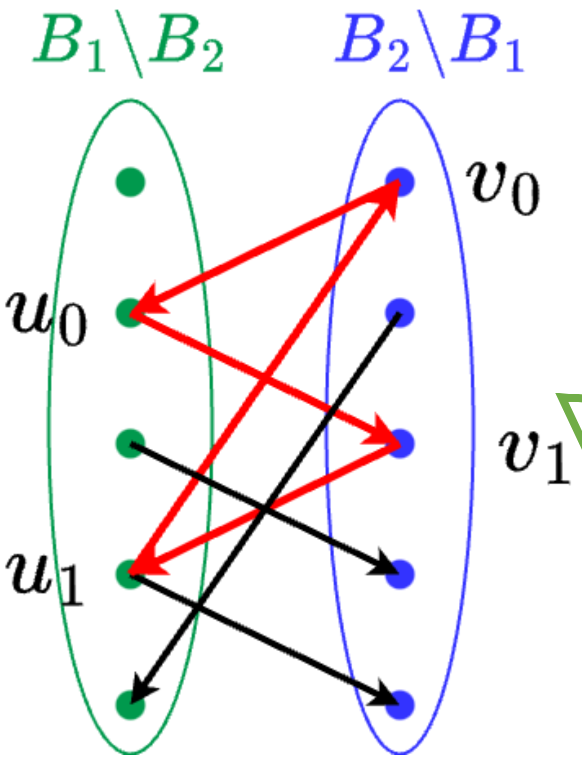
w.p. $\beta_2/(\beta_1+\beta_2)$:
　B_1を更新
w.p. $\beta_1/(\beta_1+\beta_2)$:
　B_2を更新

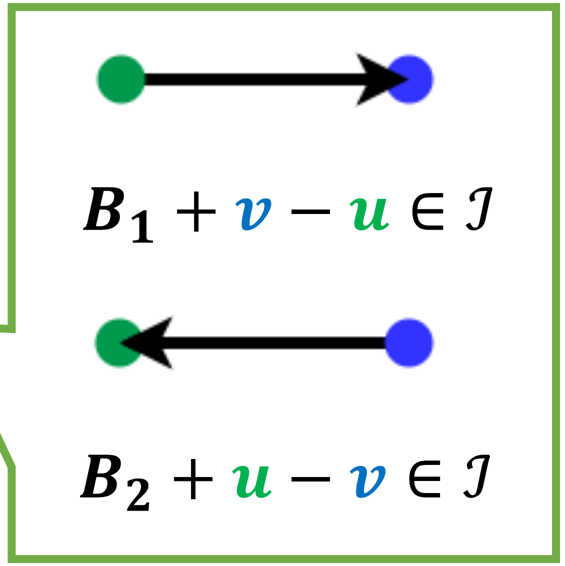


技術的貢献①: 任意の長さの閉路でも良い

w.p. $\beta_2/(\beta_1+\beta_2)$:
　B_1を更新
w.p. $\beta_1/(\beta_1+\beta_2)$:
　B_2を更新

$\{0,1\}$から i を一様ランダムに選ぶ
$B_2 \leftarrow B_2 + u_{i+1} - v_i$

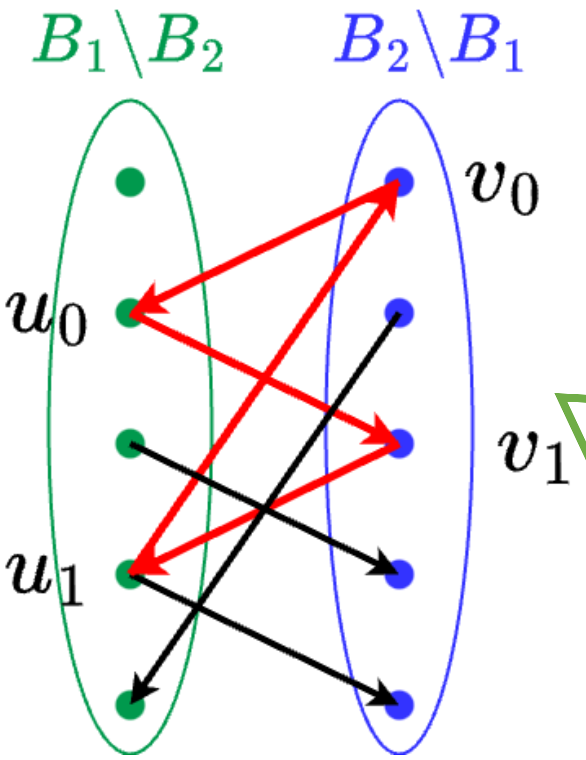




技術的貢献①: 任意の長さの閉路でも良い

w.p. $\beta_2/(\beta_1+\beta_2)$:
　B_1を更新
w.p. $\beta_1/(\beta_1+\beta_2)$:
　B_2を更新

$\{0,1\}$から i を一様ランダムに選ぶ
$B_2 \leftarrow B_2 + u_{i+1} - v_i$



$\boldsymbol{B_1} + \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} \in \mathcal{I}$

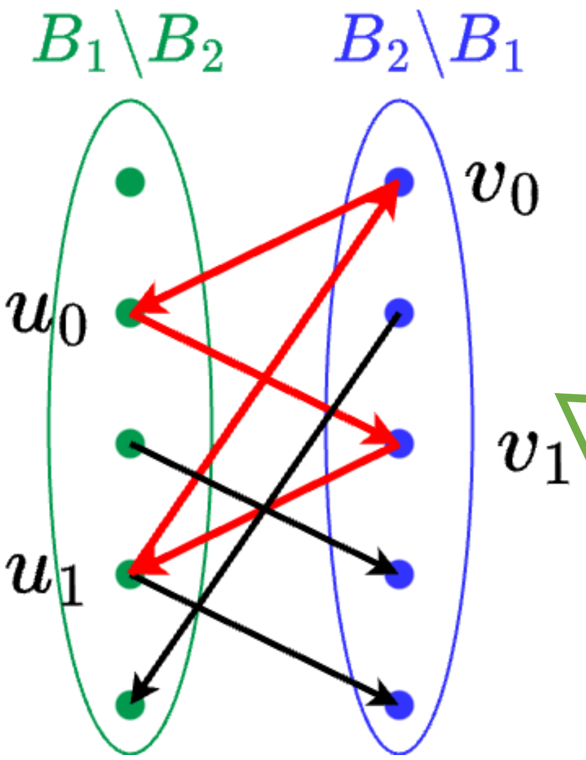
$\boldsymbol{B_2} + \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \in \mathcal{I}$

補題: $\mathbb{E}\left[\boldsymbol{\beta_1\chi_{B_1^{\mathrm{new}}}} + \boldsymbol{\beta_2\chi_{B_2^{\mathrm{new}}}}\right] = \boldsymbol{\beta_1\chi_{B_1^{\mathrm{old}}}} + \boldsymbol{\beta_2\chi_{B_2^{\mathrm{old}}}}$

技術的貢献①: 任意の長さの閉路でも良い

w.p. $\beta_2/(\beta_1+\beta_2)$:
B_1を更新
w.p. $\beta_1/(\beta_1+\beta_2)$:
B_2を更新

$\{0,1\}$から i を一様ランダムに選ぶ
$B_2 \leftarrow B_2 + u_{i+1} - v_i$



$\boldsymbol{B_1} + \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} \in \mathcal{I}$

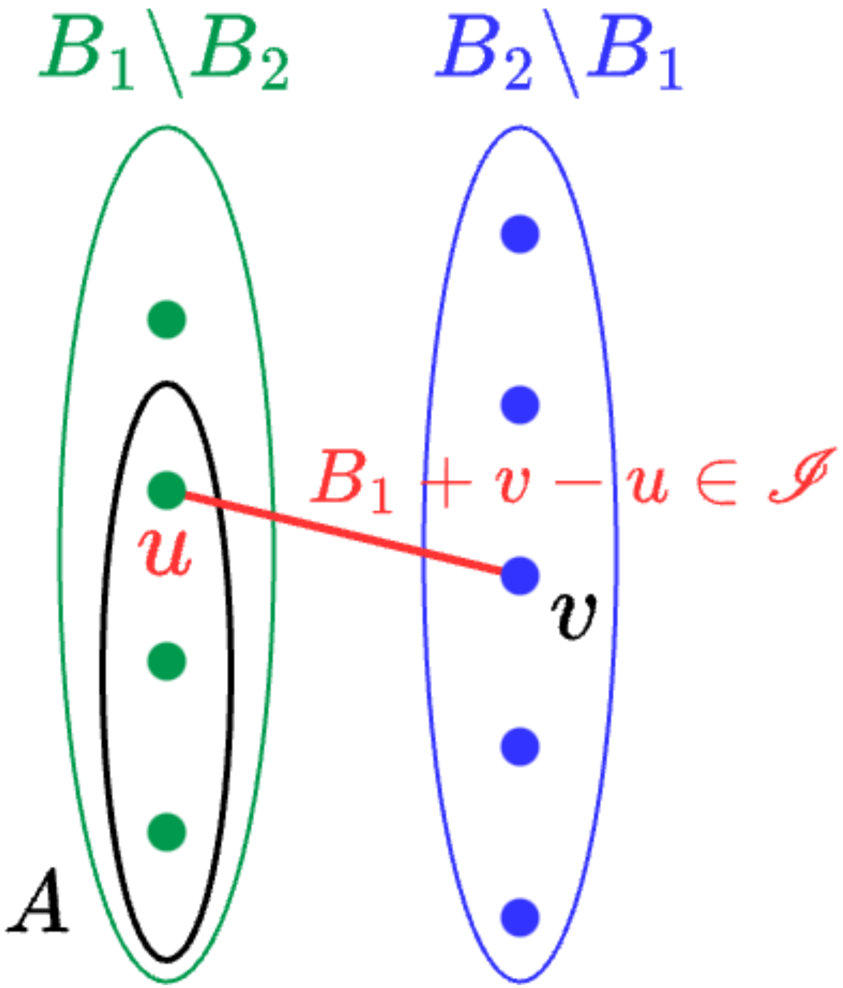
$\boldsymbol{B_2} + \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \in \mathcal{I}$

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^{\mathbf{new}})] \geq \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^{\mathbf{old}})$$

補題: $\mathbb{E}\left[\boldsymbol{\beta}_1 \chi_{B_1^{\mathbf{new}}} + \boldsymbol{\beta}_2 \chi_{B_2^{\mathbf{new}}}\right] = \boldsymbol{\beta}_1 \chi_{B_1^{\mathbf{old}}} + \boldsymbol{\beta}_2 \chi_{B_2^{\mathbf{old}}}$

マトロイド交叉の高速化の道具

[Nguyễn 2019, Chakrabarty-Lee-Sidford-Singla-Wong 2019]



入力：$\mathcal{M} = (V, \mathcal{I}),\ B \in \mathcal{I},\ v \in V \setminus B,\ A \subseteq B$
出力：$B - u + v \in \mathcal{I}$ なる $u \in A$ を一つ

二分探索を用いることで、
$O(\log |A|)$ 回の独立性オラクル
へのクエリでできる

技術的貢献②: 高速に閉路を見つけるアルゴリズム

<u>補題</u>

十分高い確率で, $\tilde{O}(\sqrt{r})$ 回の**独立性クエリで**閉路をみつけることができる

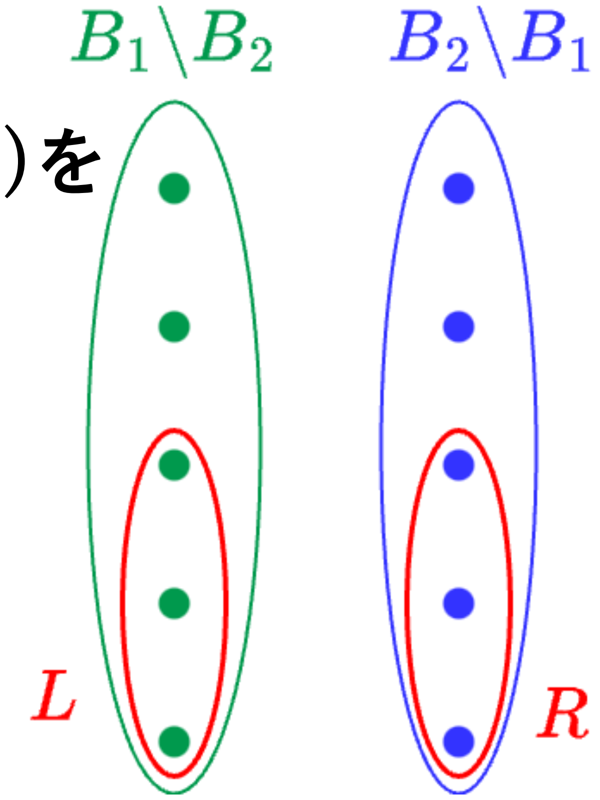
技術的貢献②: 高速に閉路を見つけるアルゴリズム

補題

十分高い確率で, $\tilde{O}(\sqrt{r})$ 回の**独立性クエリで**閉路をみつけることができる

閉路をみつけるアルゴリズム

① $B_1 \setminus B_2$(と $B_2 \setminus B_1$)から $\tilde{O}(\sqrt{r})$ 要素の集合 L (と R)をサンプル



技術的貢献②: 高速に閉路を見つけるアルゴリズム

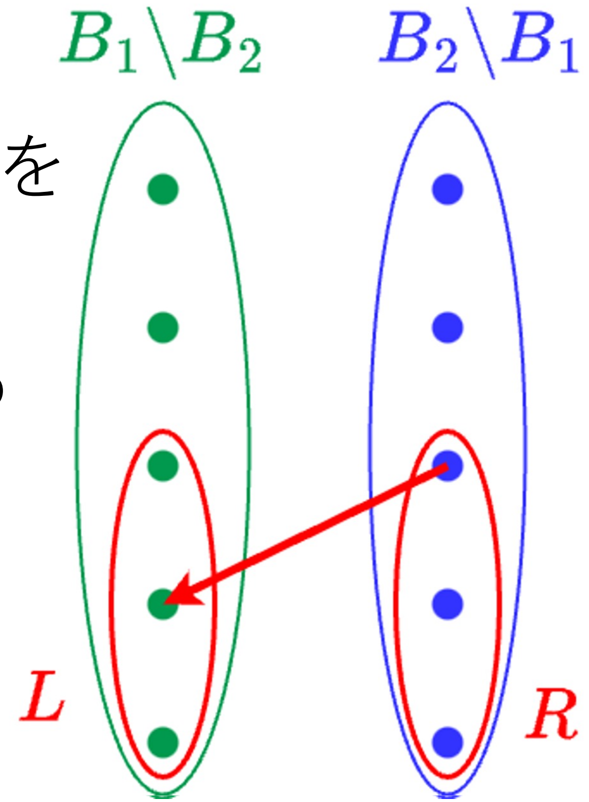
補題

十分高い確率で, $\tilde{O}(\sqrt{r})$ 回の**独立性クエリで**閉路をみつけることができる

閉路をみつけるアルゴリズム

① $B_1 \setminus B_2$（と $B_2 \setminus B_1$）から $\tilde{O}(\sqrt{r})$ 要素の集合 L（と R）をサンプル

② **$G[L \cup R]$ の各頂点に入る有向辺を１本ずつみつける**



技術的貢献②: 高速に閉路を見つけるアルゴリズム

補題

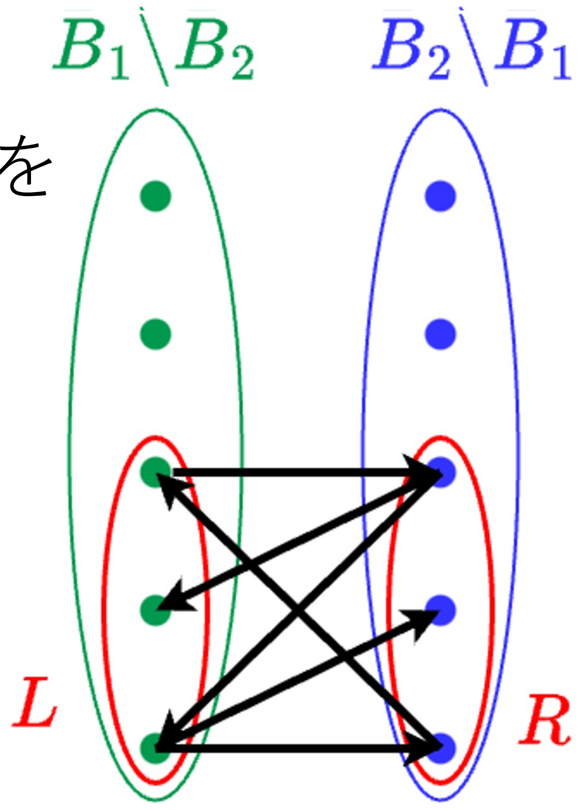
十分高い確率で, $\tilde{O}(\sqrt{r})$ 回の独立性クエリで閉路をみつけることができる

閉路をみつけるアルゴリズム

① $B_1 \setminus B_2$ (と $B_2 \setminus B_1$)から $\tilde{O}(\sqrt{r})$ 要素の集合 L (と R) をサンプル

二分探索で$\tilde{O}(\sqrt{r})$回クエリ

② **$G[L \cup R]$ の各頂点に入る有向辺を１本ずつみつける**



技術的貢献②: 高速に閉路を見つけるアルゴリズム

補題

十分高い確率で, $\tilde{O}(\sqrt{r})$ 回の**独立性クエリで**閉路をみつけることができる

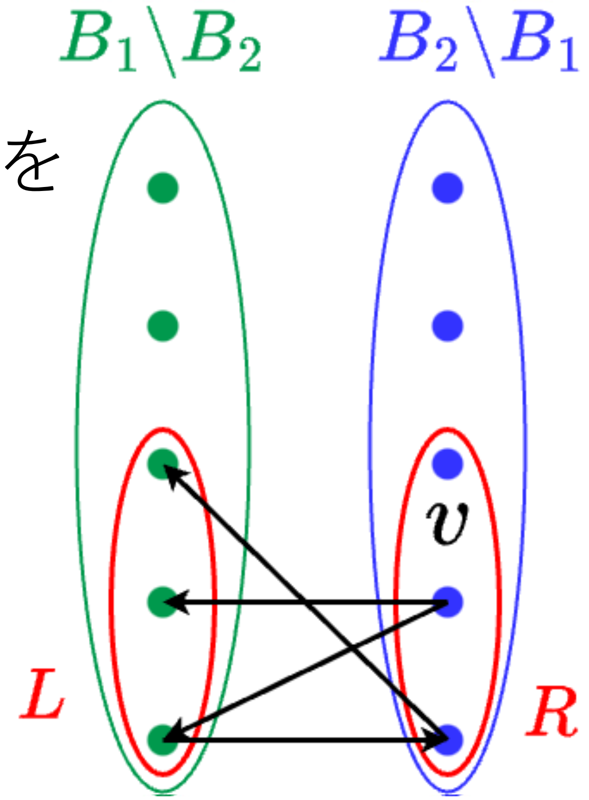
閉路をみつけるアルゴリズム

① $B_1 \setminus B_2$ (と $B_2 \setminus B_1$)から $\tilde{O}(\sqrt{r})$ 要素の集合 L (と R) をサンプル

② $G[L \cup R]$ の各頂点に入る有向辺を1本ずつみつける

③ **If ($G[L \cup R]$ での $v \in L \cup R$ の次数) = 0**

Then Gで v に入る双方向辺を探す



技術的貢献②: 高速に閉路を見つけるアルゴリズム

補題

十分高い確率で, $\tilde{O}(\sqrt{r})$ 回の**独立性クエリで**閉路をみつけることができる

閉路をみつけるアルゴリズム

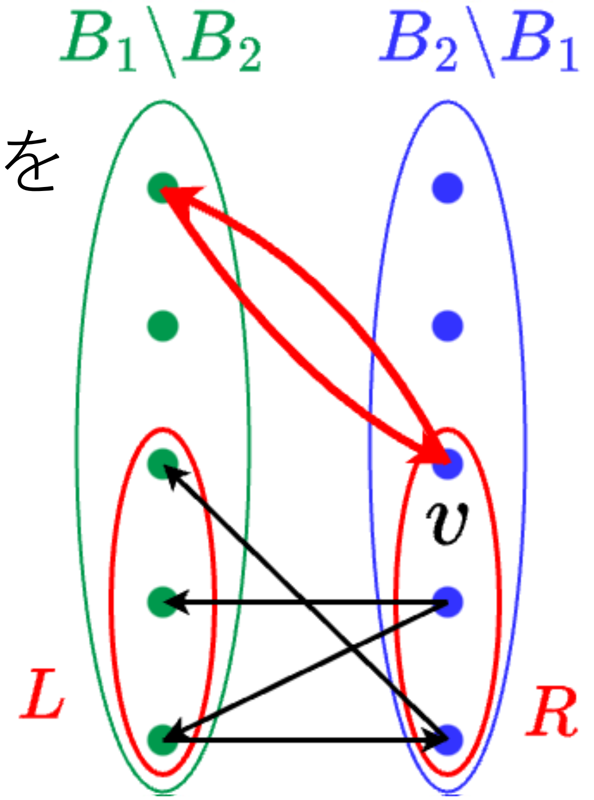
① $B_1 \setminus B_2$（と $B_2 \setminus B_1$）から $\tilde{O}(\sqrt{r})$ 要素の集合 L（と R）をサンプル

② $G[L \cup R]$ の各頂点に入る有向辺を１本ずつみつける

③ If（$G[L \cup R]$ での $v \in L \cup R$ の次数）$= 0$

Then Gで v に入る双方向辺を探す

補題 **二分探索で,十分高い確率で$\tilde{O}(\sqrt{r})$回クエリ**



技術的貢献②: 高速に閉路を見つけるアルゴリズム

補題

十分高い確率で, $\tilde{O}(\sqrt{r})$ 回の**独立性クエリで**閉路をみつけることができる

閉路をみつけるアルゴリズム

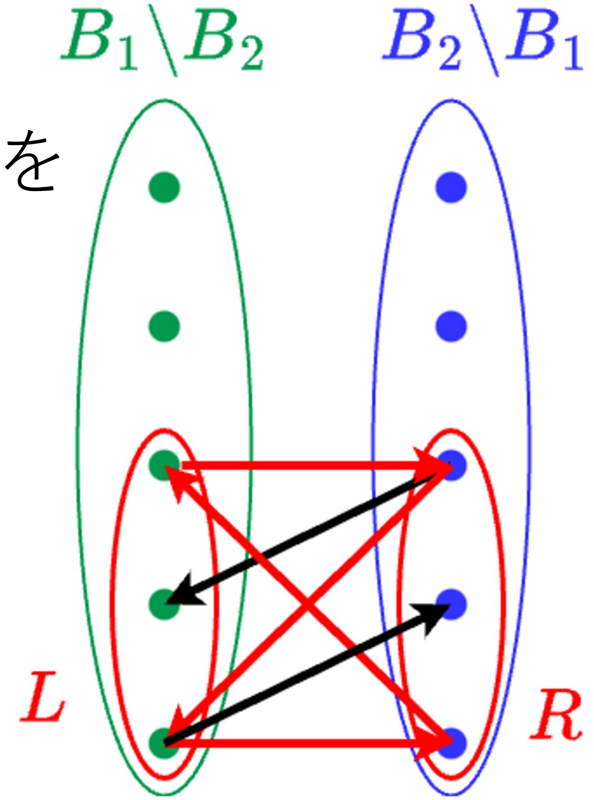
① $B_1 \setminus B_2$ (と $B_2 \setminus B_1$)から $\tilde{O}(\sqrt{r})$ 要素の集合 L (と R) をサンプル

② $G[L \cup R]$ の各頂点に入る有向辺を１本ずつみつける

③ If ($G[L \cup R]$ での $v \in L \cup R$ の次数) = 0

Then G で v に入る双方向辺を探す

Else $G[L \cup R]$ には有向閉路が存在



結論

- **マトロイド制約下での単調劣モジュラ最大化**問題に対して
  オラクルの使用回数の少ないアルゴリズムを設計
- [Chekuri-Vondrák-Zenklusen 2010]よりも**高速な丸めアルゴリズム**

- **任意の長さの閉路に拡張**
- **閉路を高速に見つけるアルゴリズムの開発**
  ☞ マトロイド交叉の高速化のテクニック

結論

- **マトロイド制約下での単調劣モジュラ最大化**問題に対して **オラクルの使用回数の少ない**アルゴリズムを設計
- [Chekuri-Vondrák-Zenklusen 2010]よりも**高速な丸めアルゴリズム**

- **任意の長さの閉路に拡張**
- **閉路を高速に見つけるアルゴリズムの開発**
  ☞ **マトロイド交叉の高速化のテクニック**

後続研究

[Buchbinder-Feldman 2024]
$(1-1/e-\epsilon)$-近似が決定的 $\tilde{O}_\epsilon(rn)$回クエリ, 乱択 $\boldsymbol{\tilde{O}_\epsilon(n+r\sqrt{n})}$回クエリ

$1/\epsilon$の項は指数

結論

- **マトロイド制約下での単調劣モジュラ最大化**問題に対して
  オラクルの使用回数の少ないアルゴリズムを設計
- [Chekuri-Vond ... 010]よりも**高速な丸めアルゴリズム**

[本研究]

連続最適化 $\tilde{\boldsymbol{O}}_{\epsilon}(\boldsymbol{n}\sqrt{\boldsymbol{r}})$回クエリ ＋ 丸め $\tilde{\boldsymbol{O}}_{\epsilon}(\boldsymbol{r}^{3/2})$回クエリ

(補足)

マトロイドが**ランクオラクル**で与えられている場合：$\tilde{\boldsymbol{O}}_{\epsilon}(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{r}^{3/2})$回クエリ

後続研究

[Buchbinder-Feldman 2024]

$(1-1/e-\epsilon)$-近似が決定的 $\tilde{O}_{\epsilon}(rn)$回クエリ, 乱択 $\tilde{\boldsymbol{O}}_{\epsilon}(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{r}\sqrt{\boldsymbol{n}})$回クエリ

$1/\epsilon$の項は指数